Kharazmi University

Mathematical Research
Year 2026, Volume 12, Issue 3, pp. 29–48

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
DOI: 10.22034/mmr.2026.131056.0

Solvability of Multidimensional Integral Inclusion Systems via Fixed Point Theory in Double-Controlled Vector-Valued Metric Spaces

Pari Amiri[(1)] and Yaser Shokri Kalandaragh[(2)] [1]

[(1)] Department of advanced sciences, Faculty of advanced technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Namin, Iran
[(2)] Department of advanced Engineering, Faculty of advanced technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Namin, Iran

Received: 25 January 2026 Accepted: 2 October 2026 Published online: 18 November 2026

Abstract: The main objective of this study is to investigate the solvability of multidimensional integral inclusion systems with heterogeneous growth rates or non-uniform stability in their components, by employing the concept of common fixed points for multivalued mappings. Accordingly, a new generalization of vector-valued metric spaces is introduced, in which the triangle inequality is controlled by two distinct square matrices. Furthermore, by defining pairs of $\mathbb{M}_\alpha$-admissible multivalued mappings, where $\mathbb{M}_\alpha$ is a diagonal matrix, the existence of their common fixed points under generalized contractive conditions is established. The obtained results are then applied to prove the existence of solutions for the considered integral inclusion system. Several illustrative examples are provided to validate the theoretical findings and to demonstrate the practical applicability of the proposed approach.

Keywords: Multidimensional integral inclusion system, Fixed point theory, Vector-valued metric spaces, Pair of M_α-admissible multi-functions.

©2026 Kharazmi University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0) license (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[1]Corresponding author: Yaser Shokri Kalandaragh
E-mail addresses: (Pari Amiri) p_amiri@uma.ac.ir, (Yaser Shokri Kalandaragh) shokri@uma.ac.ir

پژوهش‌های ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۲، شماره ۳، ص ۲۹–۴۸
شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸
DOI: 10.22034/mmr.2026.131056.0

حل‌پذیری دستگاه‌های شمول انتگرالی چندبعدی مبتنی بر رویکرد نظریه نقطه ثابت در فضاهای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی

پری امیری [۱] و یاسر شکری کلاندرق [۲] [۲]

[۱] گروه آموزشی علوم نوین، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی، نمین، ایران
[۲] گروه آموزشی مهندسی نوین، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی، نمین، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۷/۱۰ تاریخ انتشار: ۱۴۰۵/۸/۲۷

چکیده: هدف اصلی این تحقیق، بررسی وجود جواب برای دستگاه شمول انتگرالی چندبعدی با نرخ رشد ناهمگن یا پایداری غیریکنواخت در مؤلفه‌ها با استفاده از مفهوم نقطه ثابت مشترک چندتابعی‌ها است. در این راستا، تعمیم جدیدی از فضاهای متریک برداری‌مقدار معرفی می‌گردد که در آن، رابطه نامساوی مثلثی توسط دو ماتریس مربعی متمایز کنترل می‌شود. همچنین با تعریف جفت چندتابعی‌های $\mathbb{M}_\alpha$–پذیرفتنی در قالب یک ماتریس قطری، وجود نقطه ثابت مشترک آنها تحت شرایط انقباضی تعمیم‌یافته ثابت شده و نتایج حاصل برای اثبات وجود جواب برای سیستم شمول انتگرالی مذکور به کار گرفته می‌شود. در نهایت جهت اعتبارسنجی و تأیید کاربردپذیری نتایج نظری این تحقیق مثال‌های متنوعی ارائه شده است.

واژه‌هاي کلیدي: دستگاه شمول انتگرالی چندبعدی، نظریه نقطه ثابت، فضاهای متریک برداری مقدار دوبل کنترلی، جفت چندتابعی‌های $\mathbb{M}_\alpha$–پذیرفتنی.

رده‌بندی ریاضی: 47H04;47H09;47H10;45H05

۱ مقدمه

در آغاز قرن بیستم، زمانیکه استفاده از ریاضیات به منظور صورت‌بندی دقیق‌تر مفاهیم آنالیز شکل می‌گرفت، نیاز به ابزاری جهت سنجش «فاصله» میان اشیاء ریاضی بیش از پیش احساس شد. در سال ۱۹۰۶، موریتس فرشه[۳] نخستین کسی بود که مفهوم فضای متریک استاندارد را با سه شرط مثبت بودن، تقارن و نامساوی

[۲] نویسنده مسئول: یاسر شکری کلاندرق
(Pari Amiri) p_amiri@uma.ac.ir, (Yaser Shokri Kalandaragh) shokri@uma.ac.ir

[۳] M. Maurice Fréchet

مثلثی به طور رسمی معرفی کرد[۲]. مفهومی که مباحثی همچون همگرایی و پیوستگی را از چارچوب اعداد حقیقی فراتر برده و به مجموعه‌های کلی تعمیم می‌داد. این تعریف ساده اما قدرتمند، به ریاضیدانان اجازه داد تا توپولوژی را بر پایه مفهوم فاصله بنا کنند و بسیاری از قضایای کلاسیک آنالیز را در بستری وسیع‌تر بازنویسی نمایند.

با بکارگیری مفهوم فضاهای متریک استاندارد در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی و نظریه‌های کاربردی، محدودیت‌های این تعریف آشکار شد و مشخص گردید که قیود آن در بسیاری از مدل‌های طبیعی بیش از حد سخت‌گیرانه هستند. به همین دلیل، در دهه‌های بعدی ریاضیدانان به تضعیف یا تغییر این قیود پرداختند. نخستین گام‌ها با کنارگذاشتن شرط تقارن برداشته شد که به معرفی کوآزی‌متریک‌ها[۴] منجر گشت تا بتوان فضاهایی با «فاصله‌های نامتقارن» را مدل کرد. این ایده‌ها در نظریه‌های بهینه‌سازی و علوم رایانه کاربردهای فراوان یافتند [۱۰، ۱۱].

از دهه ۱۹۸۰ به بعد، موج تازه‌ای از تعمیم‌ها آغاز شد. ریاضیدانان به دنبال چارچوب‌هایی بودند که بتوانند قضایای نقطه ثابت به‌ویژه قضیه معروف باناخ[۵] را در محیط‌های گسترده‌تر به کار گیرند. لذا فضاهایی مانند فضاهای b–متریک معرفی شدند که با اعمال یک ضریب ثابت بزرگتر (یا مساوی) از یک به سمت راست نامساوی مثلثی، تعمیمی از فضاهای متریک استاندارد هستند [۳]. همین تغییر به‌ظاهر ساده، امکان به‌کارگیری ابزارهای نقطه ثابت را در مسائلی با رفتار غیرانقباضی یکنواخت فراهم کرد. در همین دوران، مفهوم متریک جزئی[۶] نیز مطرح شد که در آن فاصله‌ی هر نقطه از خودش لزوماً صفر نیست. این ایده، هرچند در نگاه اول غیرمتعارف به نظر می‌رسد، اما در مدل‌سازی سیستم‌هایی با «بار اولیه» یا «هزینه آغازین» اهمیت فراوانی دارد و در نظریه نگاشت‌های چندمقداری و قضایای نقطه ثابت نادلر[۷] جایگاه ویژه‌ای یافته است.

در نیمه دوم قرن بیستم برخی ریاضیدانان سوالاتی را مطرح کردند که منجر به نقطه عطف بزرگی در نظریه‌های قبلی شد، سوالاتی از قبیل اینکه چرا باید فاصله همیشه یک عدد حقیقی باشد؟ چرا نتوان فاصله را به صورت یک بردار در یک فضای مرتب تعریف کرد؟ این پرسش، به معرفی فضاهای متریک برداری‌مقدار[۸] انجامید [۴]. در این فضاها فاصله بین دو نقطه به‌جای یک عدد حقیقی غیرمنفی، به صورت یک بردار در یک فضای برداری مرتب در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد امکان مدل‌سازی سیستم‌هایی با معیارهای چندبعدی یا چندمؤلفه‌ای را فراهم می‌کند و به‌ویژه در مسائل بهینه‌سازی برداری و تحلیل سیستم‌های پیچیده که داشتن یک «فاصله برداری» منطقی‌تر از یک عدد منفرد است، جلوه می‌کند. این ایده به‌سرعت به نظریه نقطه ثابت نیز راه یافت و تعمیم‌هایی از قضیه باناخ در فضاهای متریک برداری‌مقدار ارائه و نشان داده شد که بسیاری از الگوریتم‌های تکراری در این محیط‌ها هم همگرا هستند [۱۳–۱۵]. بعدها، نسخه جدیدی از این متریک‌ها مانند b–متریک برداری‌مقدار[۹] معرفی شد که نه تنها از لحاظ نظری جالب بود، بلکه در کاربردهای عملی نیز اهمیت یافت [۵]. به عنوان مثال، در تحلیل شبکه‌ها، مدل‌های چندمعیاره تصمیم‌گیری و در برخی شاخه‌های علوم کامپیوتر، داشتن فاصله‌ای برداری‌مقدار امکان مقایسه همزمان چند ویژگی را فراهم کرد [۱۶، ۱۷].

با وجود این پیشرفت‌ها، بیشتر ساختارهای متریک تعمیم‌یافته تنها از یک پارامتر کنترلی (اسکالر یا ماتریسی) برای کنترل نامساوی مثلثی استفاده می‌کنند. این فرض در سیستم‌های چندجزئی با نرخ‌های رشد ناهمگون، کوپلینگ نامتقارن یا پایداری غیریکنواخت، بیش از حد محدودکننده است. در بسیاری از مدل‌های انتگرالی، هر مؤلفه ممکن است تحت تأثیر کران‌ها یا هسته‌هایی با ویژگی‌های متفاوت قرار گیرد؛ به‌طوری‌که یک کنترل یکنواخت قادر به بازتاب صحیح ماهیت ناهمسانگرد سیستم نباشد (یکی رفتار انقباضی داشته باشد، دیگری ثابت، و سومی به طور محدود بزرگ‌تر از یک باشد). بنابراین، یک ثابت یا ماتریس منفرد نمی‌تواند ماهیت ناهمسانگرد سیستم را به‌درستی بازتاب دهد. به‌منظور رفع این محدودیت، در این پژوهش از ساختار جدیدی

---

[۴] Quasimetrics
[۵] Stefan Banach
[۶] Partial Metric
[۷] Sam B. Nadler
[۸] Vector-valued metric
[۹] Vector-valued b-metric

به نام فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی[۱۰] (با کنترل دوگانه) استفاده می‌شود که تابع فاصله، برداری‌مقدار است و نامساوی مثلثی توسط دو ماتریس مستقل کنترل می‌گردد.
در سال‌های اخیر، نظریه نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌ها و چندتابعی‌های مختلف توجه زیادی را به خود جلب کرده است. تحقیقات انجام‌شده در زمینه نگاشت‌های چندمقداری در فضاهای باناخ مرتب، همچنان به‌عنوان یکی از مبانی اصلی کاربرد نظریه نقطه ثابت در شمول‌های انتگرالی شناخته می‌شوند. علاوه بر این، نتایجی در خصوص تعمیم قضایای نقطه ثابت در فضاهای b–متریک، ارتباط این نظریه را با حل‌پذیری معادلات انتگرالی نشان می‌دهد [۱، ۷–۹]. از طرفی، مفهوم نگاشت‌های α–پذیرفتنی به‌عنوان ابزاری کارآمد برای تضعیف شرایط انقباضی کلاسیک معرفی شده و تعمیم‌های متعددی از آن ارائه گردیده است. در [۱۸]، نتایج نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های چندمقداری α–پذیرفتنی در فضاهای متریک کنترل‌شده توسعه و کاربرد آن در بررسی حل‌پذیری دستگاه‌های شمول انتگرالی کسری نشان داده شده است.
هدف اصلی این مقاله، ارائه توسیع جدید از مفهوم چندتابعی‌های α–پذیرفتنی در چارچوب فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی و بررسی نتایج نقطه ثابت مشترک متناظر با آن است. در ادامه، با اثبات قضایای وجود نقطه ثابت مشترک برای خانواده‌ای از نگاشت‌های چندمقداری در این فضا، حل‌پذیری دستگاه‌های شمول انتگرالی چندبعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج به‌دست‌آمده، شرایط کافی قابل بررسی را برای وجود جواب این دستگاه‌ها فراهم می‌کنند و نشان می‌دهند که ساختار کنترلی دوگانه چگونه می‌تواند ناهمگنی ذاتی مؤلفه‌های سیستم را به‌طور مؤثری در تحلیل حل‌پذیری و همگرایی منعکس نماید. به منظور تبیین دقیق جایگاه پژوهش حاضر و تفکیک مرزهای نوآوری آن نسبت به پژوهش‌های مرتبط در ادبیات موضوع (به‌ویژه [۱۸])، ویژگی‌های ساختاری و تمایزهای کلیدی در جدول ۱ خلاصه شده است:

جدول ۱: مقایسه ساختاری و تحلیلی چارچوب پژوهش حاضر با مرجع [۱۸]

بعد مقایسه	رویکرد مرجع [۱۸]	رویکرد و نوآوری در این مقاله	مزیت تحلیلی و ریاضی
هندسه و توپولوژی فضا	فضای متریک کنترل‌شده تک‌متغیره با ضرایب اسکالر	فضای متریک متغیر–مختلط با کنترل دوگانه ماتریسی	انعطاف‌پذیری در مدل‌سازی فضاهای ناهمسانگرد
ساختار کنترل فاصله	کنترل همگن با یک ضریب کران‌دار ثابت ($\mathrm{s} \succeq \mathbb{I}$)	دو ماتریس متغیر مستقل $\mathbb{T}_1(\hat{\xi},\hat{\eta})$ و $\mathbb{T}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})$	تفکیک موضعی‌گام جاری از پویایی گام‌های زنجیره‌ای
شرط انقباض و همگرایی	انقباض کلاسیک با ثابت‌های اکیداً کمتر از یک	انقباض ماتریسی تحت قید طیفی $\rho(\mathbb{T}_2^*\mathbb{A}) < 1$	پوشش دستگاه‌های تزویج‌شده حتی در غیاب انقباض در یک مؤلفه
روش اثبات دنباله کوشی	روش‌های برآوردی استقرایی با فرض پیوستگی متریک	به‌کارگیری بسط سری نیومن ماتریسی با کران‌های یکنواخت	حذف نیاز به پیوستگی و تضمین پایداری تحت کران‌های ماتریسی
دامنه کاربرد	معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری مقدماتی تک‌متغیره	دستگاه شمول انتگرالی کسری ریمان–لیوویل چندمقداری	توانایی مدیریت اثرات تکین، رفتارهای چندارزشی

همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، تمایز این پژوهش با نتایج مرجع [۱۸] صرفاً تعمیم صوری پارامترها نیست؛ بلکه بهره‌گیری از ماتریس‌های کنترل دوگانه، ساختار فضا را از محدودیت تقارن مقیاسی رها ساخته و ابزار نیرومندی برای تحلیل دستگاه‌هایی فراهم می‌آورد که مؤلفه‌های آن‌ها نرخ رشد ناهمگون دارند. به‌علاوه، تلفیق جبر ماتریسی و شرط شعاع طیفی $\rho(\mathbb{T}_2^*\mathbb{A}) < 1$ در چارچوب سری‌های نیومن، پایه‌ای مطمئن جهت تحلیل وجود جواب در شمول‌های دیفرانسیلی کسری پیچیده مهیا می‌سازد.

[۱۰] double-controlled vector-valued metric

۲ مفاهیم مقدماتی

فرض کنید V یک مجموعه ناتهی دلخواه، R^r نشان‌دهنده فضای اقلیدسی r–بعدی و $(R^r, \preceq)$ فضای مرتب جزئی مؤلفه‌وار معمولی باشند. تمامی بردارها به‌صورت بردارهای ستونی فرض می‌شوند و مجموعه تمام زیرمجموعه‌های بسته ناتهی از V را با نماد $P_{cl}(V)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به تعریف رابطه ترتیب جزئی، به ازای هر دو عضو دلخواه متمایز $\omega_1, \omega_2 \in R^r$ و $\varepsilon \in R$ داریم:

۱. $\omega_1 \preceq \omega_2$ اگر و تنها اگر به ازای هر $n = 1, 2, \cdots, r$، $\omega_{1n} \preceq \omega_{2n}$.

۲. $\omega_1 \prec \omega_2$ اگر و تنها اگر به ازای هر $n = 1, 2, \cdots, r$، $\omega_{1n} \prec \omega_{2n}$.

۳. $\omega \preceq \varepsilon$ اگر و تنها اگر به ازای هر n، $\omega_n \preceq \varepsilon$.

۴. $\max\{\omega_1, \omega_2\} := \big(\max\{\omega_{11}, \omega_{21}\}, \max\{\omega_{12}, \omega_{22}\}, \cdots, \max\{\omega_{1r}, \omega_{2r}\}\big)$.

نگاشت $d : V \times V \to R^r_+$ که در تمامی اصول متریک معمولی صدق می‌کند، به عنوان فضای متریک برداری‌مقدار شناخته می‌شود [۴]. فرض کنید $\Theta \in R^r$ بردار صفر، $\mathbb{I}_{r,r}$ ماتریس همانی و $M_{r,r}(R_+)$ مجموعه تمام ماتریس‌های مربعی $r \times r$ با درایه‌های مثبت باشند.

تعریف ۱.۲. دو تابع $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : V \times V \to M_{r,r}(R_+)$ را در نظر بگیرید.

$$\mathbb{T}_i(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \mathrm{diag}(\beta_{ij}(\hat{\xi}, \hat{\eta}))_{j=1}^{r} \; ; \quad \beta_{ij}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \geq 1, \quad (\forall 1 \leq j \leq r, \; i = 1, 2). \tag{۱.۲}$$

نگاشت $\delta_p : V \times V \to R^r_+$ را متریک برداری‌مقدار دوکنترلی گوییم هرگاه برای هر $\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\rho} \in V$ در شرایط زیر صدق کند:

آ). $\delta_p(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \succeq \Theta$ ($\delta_p(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \Theta$ اگر و تنها اگر $\hat{\xi} = \hat{\eta}$)؛

ب). $\delta_p(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \delta_p(\hat{\eta}, \hat{\xi})$؛

پ). $\delta_p(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \preceq \delta_p(\hat{\xi}, \hat{\rho})\mathbb{T}_1(\hat{\xi}, \hat{\rho}) + \delta_p(\hat{\rho}, \hat{\eta})\mathbb{T}_2(\hat{\rho}, \hat{\eta})$.

دوتایی (V, δ_p) را فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی گوییم.

با توجه به وجود ماتریس‌های کنترلی در نامساوی مثلثی، مفاهیم همگرایی، کوشی بودن و کامل بودن در فضای متری برداری‌مقدار دوکنترلی (V, δ_p) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۲.۲. فرض کنید (V, δ_p) یک فضای متری برداری‌مقدار دوکنترلی باشد و $\{\hat{\xi}_n\}$ دنباله‌ای در V باشد.

آ). دنباله $\{\hat{\xi}_n\}$ به نقطه $\hat{\xi} \in V$ همگرا است (و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} \hat{\xi}_n = \hat{\xi}$)، هرگاه به ازای هر بردار $\epsilon \succ \Theta$ در R^r_+، عدد طبیعی $n_\circ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n \geq n_\circ$ داشته باشیم:

$$\delta_p(\hat{\xi}_n, \hat{\xi}) \prec \epsilon,$$

یا به بیان معادل، $\lim_{n\to\infty} \delta_p(\hat{\xi}_n, \hat{\xi}) = \Theta$ (با حد نرم استاندارد در R^r).

ب). دنباله $\{\hat{\xi}_n\}$ را یک دنباله کوشی در (V, δ_p) گوییم هرگاه به ازای هر بردار $\epsilon \succ \circ$ در R^r_+، عدد طبیعی $n_\circ \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که برای تمام $n, m \geq n_\circ$:

$$\delta_p(\hat{\xi}_n, \hat{\xi}_m) \prec \epsilon,$$

یا به بیان معادل، $\lim_{n,m\to\infty} \delta_p(\hat{\xi}_n, \hat{\xi}_m) = \Theta$.

پ). فضای متری برداری‌مقدار دوکنترلی $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$ را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در V، به نقطه‌ای درون V همگرا باشد.

با توجه به ساختار قطری ماتریس‌های کنترلی $\mathbb{T}_{۱}$ و $\mathbb{T}_{۲}$ در رابطه (۱.۲)، هم‌ارزی زیر بین همگرایی برداری و همگرایی مؤلفه‌وار برقرار است:

گزاره ۳.۲. فرض کنید $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=(\delta_{\mathrm{p}}^{(۱)}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\ldots,\delta_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{r})}(\hat{\xi},\hat{\eta}))^{\mathsf{T}}$. در این صورت:

آ). دنباله $\{\hat{\xi}_{\mathrm{n}}\}$ در $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$ به $\hat{\xi}$ همگرا است اگر و تنها اگر برای هر مؤلفه $\mathrm{j}\in\{۱,\ldots,\mathrm{r}\}$، دنباله در فضای کنترل‌شده اسکالر متناظر به $\hat{\xi}$ همگرا باشد؛ یعنی:
$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\delta_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{j})}(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi})=۰,\quad \forall \mathrm{j}\in\{۱,\ldots,\mathrm{r}\}.$$

ب). دنباله $\{\hat{\xi}_{\mathrm{n}}\}$ کوشی است اگر و تنها اگر در تک‌تک مؤلفه‌ها کوشی باشد:
$$\lim_{\mathrm{n},\mathrm{m}\to\infty}\delta_{\mathrm{p}}^{(\mathrm{j})}(\hat{\xi}_{\mathrm{p}},\hat{\xi}_{\mathrm{m}})=۰,\quad \forall \mathrm{j}\in\{۱,\ldots,\mathrm{j}\}.$$

پ). اگر $\{\hat{\xi}_{\mathrm{n}}\}$ دنباله‌ای در (V,δ_{p}) باشد که به $\hat{\xi}$ و $\hat{\eta}$ همگرا شود و علاوه بر آن $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathbb{T}_{۱}(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi})$ و $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ کراندار باشند، آنگاه $\hat{\xi}=\hat{\eta}$.

نتایج گزاره ۳.۲ به صورت مستقیم از قطری بودن ماتریس‌های کنترلی $\mathbb{T}_{۱}$ و $\mathbb{T}_{۲}$ و توپولوژی ضربی استاندارد روی R^{r} حاصل می‌شوند.

ملاحظه ۴.۲. بدیهی است اگر در رابطه (۱.۲)،
$$\omega_{\mathrm{ij}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathrm{b}\geq ۱,\quad (\forall\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}),\ \mathrm{i}=۱,۲,\ \mathrm{j}=۱,۲,\cdots,\mathrm{r}),$$
آنگاه هر فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی یک bـمتریک برداری‌مقدار خواهد بود.

تعریف ۵.۲. دو عملگر چندتابعی $\Phi,\Psi:\mathrm{V}\to\mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{V})$ و تابع $\mathbb{M}_{\alpha}:\mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{M}_{\mathrm{r},\mathrm{r}}(\mathrm{R}_{+})$ را در نظر بگیرید که $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ به ازای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ یک ماتریس قطری است.

آ). چندتابعی Φ را $\mathbb{M}_{\alpha}$ ـپذیرفتنی[۱۱] گوییم هرگاه از برقراری نامساوی $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})\succeq\mathbb{I}$ بتوان نتیجه گرفت به ازای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\succeq\mathbb{I}$.

ب). جفت چندتابعی (Φ,Ψ)، $\mathbb{M}_{\alpha}$ ـپذیرفتنی گوییم هرگاه برقراری نامساوی $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})\succeq\mathbb{I}$ نتیجه دهد که به ازای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\Psi\hat{\eta}$، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\mathrm{v}},\hat{\mathrm{u}})\succeq\mathbb{I}$.

مجموعه V ویژگی $\mathrm{B}^{\star}$ نسبت به $\mathbb{M}_{\alpha}$ دارد، اگر برای هر دنباله $\{\hat{\xi}_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}\geq ۱}\subseteq\mathrm{V}$ که $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi}_{\mathrm{n}+۱})\succeq\mathbb{I}$ و $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi})\to\Theta$، عدد طبیعی N چنان موجود باشد که به ازای هر $\mathrm{n}\geq N$ داشته باشیم $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi})\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\xi}_{\mathrm{n}})\succeq\mathbb{I}$.

ماتریس $\mathbb{A}\in\mathrm{M}_{\mathrm{r},\mathrm{r}}(\mathrm{R}_{+})$ یک ماتریس همگرا به صفر نامیده می‌شود هرگاه $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}\to۰$. قضیه زیر که در اثبات نتایج این تحقیق مورد استفاده قرار خواهد گرفت، در خصوص ماتریس‌های همگرا به صفر است.

قضیه ۶.۲ ([۶]). ماتریس $\mathbb{A}\in\mathrm{M}_{\mathrm{r},\mathrm{r}}(\mathrm{R}_{+})$ را در نظر بگیرید. در این صورت، موارد زیر باهم معادل هستند.

آ). $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}\to۰$؛

ب). مقادیر ویژه ماتریس $\mathbb{A}$ درگوی واحد باز قرار دارند؛

پ). ماتریس $\mathbb{I}-\mathbb{A}$ غیرتکین (نامنفرد) است و $(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-۱}=\mathbb{I}+\mathbb{A}+\cdots+\mathbb{A}^{\mathrm{r}}+\cdots$؛

ت). ماتریس $\mathbb{I}-\mathbb{A}$ غیرتکین است و درایه‌های $(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-۱}$ نامنفی هستند؛

ث). به ازای هر بردار $\mathbf{v}\in\mathrm{R}^{\mathrm{r}}$، $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}\mathbf{v}\to۰$ و $\mathbf{v}\mathbb{A}^{\mathrm{n}}\to۰$.

[۱۱] M_{α}-admissible

۳ نتایج اصلی

فرض کنید $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$ فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی کامل باشد و $\mathbb{A}\in\mathrm{M_{r,r}}(\mathrm{R_+})$ ماتریس همگرا به صفر باشد. دو ماتریس $\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2$ طبق رابطه (۱.۲) تعریف شده‌اند. همچنین فرض کنید ماتریس‌های قطری کراندار $\mathbb{T}_1^*,\mathbb{T}_2^*\in\mathrm{M_{r,r}}(\mathrm{R_+})$ چنان وجود داشته باشند به طوریکه به ازای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ داشته باشیم $\mathbb{T}_1(\hat{\xi},\hat{\eta})\preceq\mathbb{T}_1^*$، $\mathbb{T}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})\preceq\mathbb{T}_2^*$، و ماتریس $\mathbb{T}_2^*\mathbb{A}$ همگرا به صفر باشد ($\rho(\mathbb{T}_2^*\mathbb{A})<1$).

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\Phi,\Psi:\mathrm{V}\to\mathrm{P_{cl}}(\mathrm{V})$ جفت چندتابعی $\mathbb{M}_\alpha$ ـپذیرفتنی باشند و
آ). به ازای هر دو عضو دلخواه $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ و $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ $(\hat{\mathrm{u}}\in\Psi\hat{\eta})$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\Psi\hat{\eta}$ $(\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\xi})$، اعضای $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\Upsilon(\hat{\xi},\hat{\eta})$ چنان موجود باشند که

$$\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\qquad(۱.۳)$$

که در آن $\Upsilon(\hat{\xi},\hat{\eta})=\{\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi}),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})\}$؛
ب). به ازای هر $\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ و هر دنباله دلخواه $\{\hat{\xi}_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}\geq\circ}\subseteq\mathrm{V}$،

$$\mathbb{T}_1(\hat{\xi}_{\mathrm{n}+1},\hat{\xi}_{\mathrm{n}+2})\preceq\mathbb{T}_1(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi}_{\mathrm{n}+1}),\quad\mathbb{T}_2(\hat{\xi}_{\mathrm{n}+1},\hat{\eta})\mathbb{A}\preceq\mathbb{A}\mathbb{T}_2(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\eta}),\quad(\forall\mathrm{n}\geq\circ);$$

پ). عضو $\hat{\xi}_\circ\in\mathrm{V}$ و $\hat{\xi}_1\in\Phi\hat{\xi}_\circ$ موجود باشند به‌طوریکه $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_\circ)\succeq\mathbb{I}$.
در این صورت، اگر V ویژگی $\mathrm{B}^\star$ نسبت به $\mathbb{M}_\alpha$ داشته باشد، آنگاه چندتابعی‌های Φ و Ψ نقطه ثابت مشترک خواهند داشت.

اثبات. یک عضو دلخواه $\hat{\xi}_\circ\in\mathrm{V}$ و $\hat{\xi}_1\in\Phi\hat{\xi}_\circ$ را در نظر بگیرید به‌طوریکه $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_\circ)\succeq\mathbb{I}$.
در این صورت، بنا به بند آ، $\hat{\xi}_2\in\Psi\hat{\xi}_1$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)\in\Upsilon(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)$ وجود خواهند داشت به‌طوریکه

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1),$$

که در آن $\Upsilon(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)=\{\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\Phi\hat{\xi}_\circ),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\Psi\hat{\xi}_1)\}$. بدیهی است که $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\Phi\hat{\xi}_\circ)\preceq\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)$ و $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\Psi\hat{\xi}_1)\preceq\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)$، زیرا $\hat{\xi}_1\in\Phi\hat{\xi}_\circ$ و $\hat{\xi}_2\in\Psi\hat{\xi}_1$. اگر $\hat{\xi}_1=\hat{\xi}_\circ$، می‌توان به آسانی ثابت کرد که $\hat{\xi}_1=\hat{\xi}_2$ و لذا $\hat{\xi}_\circ$ نقطه ثابت مشترک چندتابعی‌های Φ و Ψ است. در واقع، اگر $\hat{\xi}_1=\hat{\xi}_\circ$ ولی $\hat{\xi}_1\neq\hat{\xi}_2$، آنگاه نتایج زیر بدست می‌آید که تناقض هستند:
*). اگر $\mathrm{L}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)=\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)$ و یا $\mathrm{L}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)=\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\Phi\hat{\xi}_\circ)$، آنگاه خواهیم داشت

$$\Theta\prec\delta_{\mathrm{p}}^{\mathbf{t}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)=\Theta;$$

**). اگر $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)$، آنگاه $\mathrm{L}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)=\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\Psi\hat{\xi}_1)$ و لذا

$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\Theta\Rightarrow(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}(\mathbb{I}-\mathbb{A})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\Theta\Rightarrow\Theta\prec\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\Theta.$$

بنابراین فرض کنید $\hat{\xi}_1\neq\hat{\xi}_\circ$ و $\hat{\xi}_2\neq\hat{\xi}_1$. در این حالت، $\mathrm{L}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)$ برابر با یکی از دو مقدار $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1)$ و یا $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\Phi\hat{\xi}_\circ)$ بوده و خواهیم داشت:

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\preceq\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_\circ,\hat{\xi}_1).\qquad(۲.۳)$$

از آنجا که (Φ,Ψ) جفت چندتابعی $\mathbb{M}_\alpha$ ـپذیرفتنی است، لذا $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_2,\hat{\xi}_1)\succeq\mathbb{I}$. بنابراین با استفاده از بند آ، می‌توان نتیجه گرفت اعضای $\hat{\xi}_3\in\Phi\hat{\xi}_2$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\in\Upsilon(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)$ چنان وجود دارند که

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_2,\hat{\xi}_3)\preceq\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2)\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_2,\hat{\xi}_3)\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2),$$

که در آن $\Upsilon(\hat{\xi}_۱,\hat{\xi}_۲)=\{\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۱,\hat{\xi}_۲),\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۲,\Phi\hat{\xi}_۲),\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۱,\Psi\hat{\xi}_۱)\}$. مشابهاً $\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۲,\Phi\hat{\xi}_۲)\preceq\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۲,\hat{\xi}_۳)$، زیرا $\hat{\xi}_۳\in\Phi\hat{\xi}_۲$ و اگر $\hat{\xi}_۳=\hat{\xi}_۲$، آنگاه $\hat{\xi}_۲=\hat{\xi}_۱$ بوده و به تبع آن، $\hat{\xi}_۱$ نقطه ثابت مشترک Φ و Ψ خواهد بود. بنابراین فرض کنید $\hat{\xi}_۱\neq\hat{\xi}_۲\neq\hat{\xi}_۳$. پس $\mathrm{L}(\hat{\xi}_۱,\hat{\xi}_۲)=\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۱,\hat{\xi}_۲)$ یا $\mathrm{L}(\hat{\xi}_۱,\hat{\xi}_۲)=\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۱,\Psi\hat{\xi}_۱)$. در نتیجه

$$\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۲,\hat{\xi}_۳)\preceq\mathbb{A}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۱,\hat{\xi}_۲). \tag{۳.۳}$$

از نامساوی‌های (۲.۳) و (۳.۳) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۲,\hat{\xi}_۳)\preceq\mathbb{A}^۲\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱).$$

با ادامه این روند، دنباله $\{\hat{\xi}_{\rm n}\}_{{\rm n}\geq۰}\subseteq\mathrm{V}$ بدست می‌آید به‌طوریکه

$$\hat{\xi}_{۲{\rm n}+۱}\in\Phi\hat{\xi}_{۲{\rm n}},\quad \hat{\xi}_{۲{\rm n}+۲}\in\Psi\hat{\xi}_{۲{\rm n}+۱},\quad \delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\preceq\mathbb{A}^{\rm n}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱),\quad (\forall{\rm n}\geq۱). \tag{۴.۳}$$

با توجه به اینکه (Φ,Ψ) جفت چندتابعی $\mathbb{M}_\alpha$ ـپذیرفتنی است، لذا به ازای هر ${\rm n}\geq۰$، داریم $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm n})\succeq\mathbb{I}$. با استفاده از رابطه (۴.۳)، به ازای هر ${\rm n},{\rm m}\in\mathbb{N}$ که ${\rm n}<{\rm m}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{\rm m}) &\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})+\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\\
&\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\\
&+\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\Big\{\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{{\rm n}+۲})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{{\rm n}+۲})+\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۲},\hat{\xi}_{\rm m})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{{\rm n}+۲},\hat{\xi}_{\rm m})\Big\}\\
&\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm l}+۱})+\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{{\rm n}+۲})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{{\rm n}+۲})\\
&+\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۲},\hat{\xi}_{\rm m})\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{{\rm n}+۲},\hat{\xi}_{\rm m})\\
&\preceq\cdots\\
&\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\mathbb{A}^{\rm n}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)+\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{{\rm n}+۲})\mathbb{A}^{{\rm n}+۱}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)\\
&+\prod_{{\rm j}={\rm n}+۱}^{{\rm n}+۲}\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{\rm j},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{{\rm n}+۲},\hat{\xi}_{{\rm n}+۳})\mathbb{A}^{{\rm n}+۲}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)+\cdots\\
&+\prod_{{\rm j}={\rm n}+۱}^{{\rm m}-۲}\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{\rm j},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{{\rm m}-۲},\hat{\xi}_{{\rm m}-۱})\mathbb{A}^{{\rm m}-۲}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)\\
&+\prod_{{\rm j}={\rm n}+۱}^{{\rm m}-۱}\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{\rm j},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{A}^{{\rm m}-۱}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)\\
&\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\mathbb{A}^{\rm n}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)+\sum_{{\rm l}={\rm n}+۱}^{{\rm m}-۱}\prod_{{\rm j}={\rm n}+۱}^{\rm l}\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{\rm j},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm l},\hat{\xi}_{{\rm l}+۱})\mathbb{A}^{\rm l}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱).
\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از شرط (پ)، می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{\rm m}) &\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\mathbb{A}^{\rm n}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)+\sum_{{\rm l}={\rm n}+۱}^{{\rm m}-۱}\mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm l},\hat{\xi}_{{\rm l}+۱})\big(\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{A}\big)^{{\rm l}-{\rm n}}\mathbb{A}^{\rm n}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱)\\
&\preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_{\rm n},\hat{\xi}_{{\rm n}+۱})\left\{\sum_{{\rm l}={\rm n}}^{{\rm m}-۱}\big(\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{{\rm n}+۱},\hat{\xi}_{\rm m})\mathbb{A}\big)^{{\rm l}-{\rm n}}\right\}\mathbb{A}^{\rm n}\delta_{\rm p}(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱).
\end{aligned}$$

از آنجا که به ازای هر n و m، داریم $\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{n+۱},\hat{\xi}_m) \preceq \mathbb{T}_۲^*$ ، لذا با توجه به ویژگی‌های سری نیومان برای ماتریس‌های نامنفی و شرط $\rho(\mathbb{T}_۲^*\mathbb{A}) < ۱$، به ازای هر $n \geq ۱$، خواهیم داشت:

$$\sum_{l=n}^{m-۱}\Big(\mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{n+۱},\hat{\xi}_m)\mathbb{A}\Big)^{l-n} \preceq \sum_{k=۰}^{\infty}(\mathbb{T}_۲^*\mathbb{A})^k = (\mathbb{I}-\mathbb{T}_۲^*\mathbb{A})^{-۱}.$$

بنابراین نامساوی فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta_p(\hat{\xi}_n,\hat{\xi}_m) \preceq \mathbb{T}_۱^*(\mathbb{I}-\mathbb{T}_۲^*\mathbb{A})^{-۱}\mathbb{A}^n\delta_p(\hat{\xi}_۰,\hat{\xi}_۱).$$

از آنجا که ماتریس $\mathbb{T}_۱^*(\mathbb{I}-\mathbb{T}_۲^*\mathbb{A})^{-۱}$ ثابت، نامنفی و مستقل از n, m است، و شرط $\rho(\mathbb{A}) < ۱$ ایجاب می‌کند $\lim_{n\to\infty}\mathbb{A}^n = ۰$ ، در نتیجه:

$$\lim_{n,m\to\infty}\delta_p(\hat{\xi}_n,\hat{\xi}_m) = \Theta.$$

بنابراین $\{\hat{\xi}_n\}_{n\geq ۰}$ یک دنباله کوشی در فضای متریک کامل V است و لذا $\hat{\xi}_*$ چنان وجود دارد که $\hat{\xi}_n \to \hat{\xi}_*$. با توجه به اینکه V نسبت به $\mathbb{M}_\alpha$ ویژگی B^* دارد، لذا به ازای هر $n \geq ۰$، داریم $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_n,\hat{\xi}_*) \succeq \mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_l) \succeq \mathbb{I}$. چون $\hat{\xi}_{۲n+۱}\in\Phi\hat{\xi}_{۲n}$ و $\hat{\xi}_{۲n+۲}\in\Psi\hat{\xi}_{۲n+۱}$، پس

$$\exists\big(\theta_n,\mathrm{L}(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*)\big)\in\big(\Psi\hat{\xi}_*,\Upsilon(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*)\big),\quad \exists\big(\gamma_n,\mathrm{L}(\hat{\xi}_{۲n+۱},\hat{\xi}_*)\big)\in\big(\Phi\hat{\xi}_*,\Upsilon(\hat{\xi}_{۲n+۱},\hat{\xi}_*)\big),\quad (\forall n\geq ۰),$$

به‌طوریکه

$$\begin{cases}\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۱},\theta_n) \preceq \mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*)\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۱},\theta_n) \preceq \mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*),\\ \delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۲},\gamma_n) \preceq \mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_{۲n+۱},\hat{\xi}_*)\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۲},\gamma_n) \preceq \mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi}_{۲n+۱},\hat{\xi}_*),\end{cases}$$

که

$$\begin{aligned}\Upsilon(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*) &= \big\{\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*),\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\Phi\hat{\xi}_{۲n}),\delta_p(\hat{\xi}_*,\Psi\hat{\xi}_*)\big\},\\ \Upsilon(\hat{\xi}_{۲n+۱},\hat{\xi}_*) &= \big\{\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۱},\hat{\xi}_*),\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۱},\Psi\hat{\xi}_{۲n+۱}),\delta_p(\hat{\xi}_*,\Phi\hat{\xi}_*)\big\}.\end{aligned}$$

حال باید نشان داد که دنباله‌های $\{\theta_n\}_{n\geq ۰}$ و $\{\gamma_n\}_{n\geq ۰}$ به $\hat{\xi}_*$ همگرا هستند. داریم

$$\begin{cases}\delta_p(\hat{\xi}_*,\theta_n) \preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱})\delta_p(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱}) + \mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{۲n+۱},\theta_n)\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۱},\theta_n),\\ \delta_p(\hat{\xi}_*,\theta_n) \preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۲})\delta_p(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۲}) + \mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{۲n+۲},\theta_n)\delta_p(\hat{\xi}_{۲n+۲},\theta_n),\end{cases}\quad (\forall n\geq ۰).\qquad (۵.۳)$$

اگر $\mathrm{L}(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*)$ با یکی از مقادیر $\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*)$ یا $\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\Phi\hat{\xi}_{۲n})$ برابر باشد، آنگاه با استفاده از رابطه (۵.۳)، می‌توان نتیجه گرفت

$$\delta_p(\hat{\xi}_*,\theta_n) \preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱})\delta_p(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱}) + \mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{۲n+۱},\theta_n)\mathbb{A}\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*)$$

یا

$$\delta_p(\hat{\xi}_*,\theta_n) \preceq \mathbb{T}_۱(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱})\delta_p(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱}) + \mathbb{T}_۲(\hat{\xi}_{۲n+۱},\theta_n)\mathbb{A}\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_{۲n+۱}),$$

و لذا به ازای هر $n \geq ۱$،

$$\begin{aligned}\delta_p(\hat{\xi}_*,\theta_n) &\preceq \mathbb{T}_۱^*\delta_p(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱}) + \mathbb{T}_۲^*\mathbb{A}\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_*),\\ \delta_p(\hat{\xi}_*,\theta_n) &\preceq \mathbb{T}_۱^*\delta_p(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲n+۱}) + \mathbb{T}_۲^*\mathbb{A}\delta_p(\hat{\xi}_{۲n},\hat{\xi}_{۲n+۱}).\end{aligned}$$

بدیهی است اگر $\mathrm{n}\to\infty$، آنگاه $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\theta_{\mathrm{n}})\preceq\Theta$ و در نتیجه $\theta_{\mathrm{n}}\to\hat{\xi}_*$. حال اگر $\mathrm{L}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}},\hat{\xi}_*)=\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\Psi\hat{\xi}_*)$، آنگاه از رابطه (۵.۳)، داریم

$$\begin{aligned}&\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\theta_{\mathrm{n}})\preceq\mathbb{T}_{۱}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})+\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\theta_{\mathrm{n}}),\\&\Rightarrow\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\theta_{\mathrm{n}})\preceq(\mathbb{I}-\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A})^{-۱}\mathbb{T}_{۱}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱}).\end{aligned}$$

از آنجا که $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A}\preceq\mathbb{T}_{۲}^{*}\mathbb{A}$ ، لذا بنا به نامنفی بودن درایه‌ها، برای هر $\mathrm{r}\geq۰$ داریم

$$(\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A})^{\mathrm{r}}\preceq(\mathbb{T}_{۲}^{*}\mathbb{A})^{\mathrm{r}}.$$

بنابراین با استفاده از بسط سری نیومان برای ماتریس‌های نامنفی، رابطه زیر برقرار است:

$$(\mathbb{I}-\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A})^{-۱}=\sum_{\mathrm{r}=۰}^{\infty}(\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A})^{\mathrm{r}}\preceq\sum_{\mathrm{r}=۰}^{\infty}(\mathbb{T}_{۲}^{*}\mathbb{A})^{\mathrm{r}}=(\mathbb{I}-\mathbb{T}_{۲}^{*}\mathbb{A})^{-۱}.$$

با اعمال این کران بالا و همچنین نامساوی $\mathbb{T}_{۱}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})\preceq\mathbb{T}_{۱}^{*}$ ، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\theta_{\mathrm{n}})&\preceq(\mathbb{I}-\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱},\theta_{\mathrm{n}})\mathbb{A})^{-۱}\mathbb{T}_{۱}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})\\&\preceq(\mathbb{I}-\mathbb{T}_{۲}^{*}\mathbb{A})^{-۱}\mathbb{T}_{۱}^{*}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱}).\end{aligned}$$

از آنجا که ماتریس $(\mathbb{I}-\mathbb{T}_{۲}^{*}\mathbb{A})^{-۱}\mathbb{T}_{۱}^{*}$ ثابت و مستقل از n است، و با توجه به اینکه $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱}=\hat{\xi}_*$ (یعنی $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\hat{\xi}_{۲\mathrm{n}+۱})=\Theta$)، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi}_*,\theta_{\mathrm{n}})=\Theta\implies\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\theta_{\mathrm{n}}=\hat{\xi}_*.$$

در نهایت، با توجه به بسته بودن مجموعه $\Psi\hat{\xi}_*$ ، نتیجه می‌گیریم که $\hat{\xi}_*\in\Psi\hat{\xi}_*$. به طریقی کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که $\hat{\xi}_*\in\Phi\hat{\xi}_*$. بنابراین $\hat{\xi}_*$ نقطه ثابت مشترک چندتابعی‌های Φ و Ψ است. □

مثال ۲.۳. فرض کنید $\mathrm{V}=[-۱,۱]$، $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{۲}{۳}&\frac{۳}{۲}\\۰&\frac{۳}{۴}\end{pmatrix}$ و متریک $\delta_{\mathrm{p}}:\mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{R}_{+}^{۲}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\left(|\hat{\xi}-\hat{\eta}|^{\frac{۳}{۲}},|\hat{\xi}-\hat{\eta}|\right)^{\mathsf{T}},\quad(\forall\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}).$$

با توجه به اینکه، رابطه $|\upsilon+\omega|^{\mathrm{r}}\leq۲^{\mathrm{r}-۱}(|\upsilon|^{\mathrm{r}}+|\omega|^{\mathrm{r}})$ به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه υ,ω و هر عدد حقیقی مثبت بزرگتر از یک مانند r برقرار است، لذا $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$ یک فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی کامل با $\mathbb{T}_{۱}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\lambda\begin{pmatrix}\sqrt{۲}&۰\\۰&۱\end{pmatrix}$ و $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mu\begin{pmatrix}\sqrt{۲}&۰\\۰&۱\end{pmatrix}$ است که در آن $\lambda,\mu\geq۱$. در واقع، انتخاب توان ۳/۲ سبب می‌شود که ضریب نامساوی مثلثی در نقاط مختلف مجموعه V تغییر کند. این امر مانع از آن می‌شود که ساختار فضا به یک فضای متری ساده با ضریب ثابت تقلیل یابد و نشان‌دهنده ساختار دوکنترلی در این فضا است. قرار دهید $\lambda=\mu=۱$. برای اثبات همگرایی ماتریس‌های $\mathbb{A}$ و $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ به سمت ماتریس صفر، مقادیر ویژه آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. با توجه به ساختار ماتریس انقباض $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{a}_{۱۱}&\mathrm{a}_{۱۲}\\۰&\mathrm{a}_{۲۲}\end{pmatrix}$ و ماتریس کنترل $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\begin{pmatrix}\tau_{۱}&۰\\۰&\tau_{۲}\end{pmatrix}$، مقادیر ویژه ماتریس حاصل‌ضرب $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ دقیقاً برابر با $\lambda_{۱}=\tau_{۱}\mathrm{a}_{۱۱}$ و $\lambda_{۲}=\tau_{۲}\mathrm{a}_{۲۲}$ می‌باشند. از آنجا که طبق مقادیر انتخابی در این مثال داریم:

$$|\lambda_{۱}|=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}<۱\quad\text{و}\quad|\lambda_{۲}|=\frac{۳}{۴}<۱,$$

و لذا شعاع طیفی هر دو ماتریس اکیداً کمتر از یک است، یعنی $\rho(\mathbb{A})<1$ و $\rho(\mathbb{T}_{2}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A})<1$. در نتیجه، بنا به قضیه ۶.۲، به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{A}^{n}=0 \quad و \quad \lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{T}_{2}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}\right)^{n}=0.$$

فرض کنید چندتابعی‌های $\Phi,\Psi:V\to P_{cl}(V)$ به صورت زیر تعریف شوند:

$$\Phi\hat{\xi}=\begin{cases}[0,\hat{\xi}-\hat{\xi}^{2}] & \hat{\xi}\geq\frac{3}{5},\\ \{0\} & else.\end{cases}, \qquad \Psi\hat{\xi}=\begin{cases}[\hat{\xi}^{2}+\hat{\xi},0] & \hat{\xi}\leq\frac{-3}{5},\\ \{0\} & else.\end{cases}, \qquad (\forall\hat{\xi}\in V).$$

و همچنین برای هر $\hat{\xi}<\frac{3}{5}$ و $\hat{\eta}>\frac{-3}{5}$، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},0)=\mathbb{M}_{\alpha}(0,\hat{\eta})=\mathbb{I}+\mathbb{Q}$ باشد که $\mathbb{Q}\in M_{2,2}(\mathbb{R}_{+})$، برای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\geq\frac{3}{5}$ و هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\leq\frac{-3}{5}$، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{9}{8}\end{pmatrix}$، و برای سایر موارد، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathbb{Z}$، که در آن $\mathbb{Z}$ ماتریس مربعی صفر از مرتبه ۲ است.

برای اثبات $\mathbb{M}_{\alpha}$-پذیرفتنی بودن جفت (Φ,Ψ)، فرض کنید $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})\succeq\mathbb{I}$. بنا بر تعریف $\mathbb{M}_{\alpha}$، سه حالت زیر ممکن است رخ دهد:

۱. اگر $\hat{\xi}<\frac{3}{5}$ و $\hat{\eta}>-\frac{3}{5}$ باشد، آنگاه $\Phi\hat{\xi}=\{0\}$ و $\Psi\hat{\eta}=\{0\}$. در نتیجه برای $\hat{u}=\hat{v}=0$ داریم $\mathbb{M}_{\alpha}(0,0)\succeq\mathbb{I}$.

۲. اگر $\hat{\xi},\hat{\eta}\geq\frac{3}{5}$ باشد، آنگاه برای هر $\hat{u}\in[0,\hat{\xi}-\frac{\hat{\xi}^{2}}{2}]$ داریم $0\leq\hat{u}<\frac{3}{5}$، و چون $\hat{\eta}\geq\frac{3}{5}>-\frac{3}{5}$ است، $\Psi\hat{\eta}=\{0\}$ یعنی $\hat{v}=0$. در نتیجه $\hat{u}<\frac{3}{5}$ و $\hat{v}>-\frac{3}{5}$، لذا $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{u},\hat{v})\succeq\mathbb{I}$.

۳. اگر $\hat{\xi},\hat{\eta}\leq-\frac{3}{5}$ باشد، به‌طور مشابه $\hat{u}=0$ و برای هر $\hat{v}\in[\hat{\eta}+\hat{\eta}^{2},0]$ داریم $-\frac{3}{5}<\hat{v}\leq0$؛ در نتیجه $\hat{u}<\frac{3}{5}$ و $\hat{v}>-\frac{3}{5}$، که نتیجه می‌دهد $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{u},\hat{v})\succeq\mathbb{I}$.

بنابراین در تمامی حالات، برای هر $\hat{u}\in\Phi\hat{\xi}$ و $\hat{v}\in\Psi\hat{\eta}$ داریم $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{u},\hat{v})\succeq\mathbb{I}$ و لذا جفت چندتابعی (Φ,Ψ)، $\mathbb{M}_{\alpha}$- پذیرفتنی است.

از طرفی، برای هر $\hat{\xi}_{0}\in[\frac{-3}{5},\frac{3}{5}]$ و هر $\hat{\xi}\in\Phi\hat{\xi}_{0}$، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi}_{0},\hat{\xi})=\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\xi}_{0})\succeq\mathbb{I}$. همچنین V نسبت به ماتریس $\mathbb{M}_{\alpha}$ ویژگی $B^{\star}$ دارد. حال باید نشان داد که چندتابعی‌های Φ و Ψ، به ازای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in V$، در نامساوی (۱.۳) صدق می‌کنند. واضح است که نامساوی (۱.۳) زمانی که $\hat{\xi}=0$ و $\hat{\eta}>\frac{-3}{5}$ و یا $\hat{\eta}=0$ و $\hat{\xi}<\frac{3}{5}$، برقرار است، زیرا $\Phi\hat{\xi}=\Psi\hat{\eta}=\{0\}$ و $\delta_{p}(\hat{u},\hat{v})$ برای هر $(\hat{u},\hat{v})\in\Phi\hat{\xi}\times\Psi\hat{\eta}$ برابر با صفر خواهد بود. اگر $\hat{\xi},\hat{\eta}\geq\frac{3}{5}$، آنگاه $\Phi\hat{\xi}=[0,\hat{\xi}-\hat{\xi}^{2}]$ و $\Psi\hat{\eta}=\{0\}$. لذا خواهیم داشت:

$$\delta_{p}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\left(|\hat{\xi}-\hat{\eta}|^{\frac{3}{2}},|\hat{\xi}-\hat{\eta}|\right)^{T}, \quad \delta_{p}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=\left(\hat{\xi}^{3},\hat{\xi}^{2}\right)^{T}, \quad \delta_{p}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})=(\hat{\eta}^{\frac{3}{2}},\hat{\eta})^{T}.$$

در نتیجه

$$\mathbb{A}\delta_{p}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\xi}^{3}\\ \hat{\xi}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\hat{\xi}^{3}+\frac{3}{2}\hat{\xi}^{2}\\ \frac{3}{4}\hat{\xi}^{2}\end{pmatrix}.$$

فرض کنید $\hat{u}\in\Phi\hat{\xi}$. پس $\hat{u}\leq\hat{\xi}-\hat{\xi}^{2}$، $\hat{u}^{\frac{3}{2}}\leq(\hat{\xi}-\hat{\xi}^{2})^{\frac{3}{2}}$ و لذا می‌توان به آسانی نشان داد

$$\begin{cases}(1-\hat{\xi})^{3}\leq\hat{\xi}(\frac{2}{3}\hat{\xi}+\frac{3}{2})^{2}\Rightarrow(\hat{\xi}-\hat{\xi}^{2})^{\frac{3}{2}}\leq\frac{2}{3}\hat{\xi}^{3}+\frac{3}{2}\hat{\xi}^{2},\\ \hat{\xi}\geq\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{15}{8}\hat{\xi}^{2}\geq\frac{9}{8}\hat{\xi}\Rightarrow\frac{3}{4}\hat{\xi}^{2}\geq\frac{9}{8}(\hat{\xi}-\hat{\xi}^{2})\geq\frac{9}{8}\hat{u}.\end{cases}$$

در نتیجه

$$\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{9}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathrm{u}}^{\frac{3}{2}}\\ \hat{\mathrm{u}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\mathrm{u}}^{\frac{3}{2}}\\ \frac{9}{8}\hat{\mathrm{u}}\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\hat{\xi}^3+\frac{3}{2}\hat{\xi}^2\\ \frac{3}{4}\hat{\xi}^2\end{pmatrix}.$$

بنابراین، $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ اگر $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})$. حال اگر $\hat{\xi},\hat{\eta}\le-\frac{3}{5}$، آنگاه $\Phi\hat{\xi}=\{0\}$ و $\Psi\hat{\eta}=[\hat{\eta}+\hat{\eta}^2,0]$. لذا

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\big(|\hat{\xi}-\hat{\eta}|^{\frac{3}{2}},|\hat{\xi}-\hat{\eta}|\big)^{\mathsf{T}},\quad \delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=(|\hat{\xi}|^{\frac{3}{2}},|\hat{\xi}|)^{\mathsf{T}},\quad \delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})=\big(|\hat{\eta}|^3,|\hat{\eta}|^2\big)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\hat{\eta}|^3\\ |\hat{\eta}|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}|\hat{\eta}|^3+\frac{3}{2}|\hat{\eta}|^2\\ \frac{3}{4}|\hat{\eta}|^2\end{pmatrix}.$$

فرض کنید $\hat{\mathrm{u}}\in\Psi\hat{\eta}$. در این صورت، $\hat{\mathrm{u}}\ge\hat{\eta}+\hat{\eta}^2$، $|\hat{\mathrm{u}}|^{\frac{3}{2}}\le|\hat{\eta}+\hat{\eta}^2|^{\frac{3}{2}}$ و مشابهاً نشان داده می‌شود که

$$\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{9}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\hat{\mathrm{u}}|^{\frac{3}{2}}\\ |\hat{\mathrm{u}}|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\hat{\mathrm{u}}|^{\frac{3}{2}}\\ \frac{9}{8}|\hat{\mathrm{u}}|\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}\frac{2}{3}|\hat{\eta}|^3+\frac{3}{2}|\hat{\eta}|^2\\ \frac{3}{4}|\hat{\eta}|^2\end{pmatrix}.$$

بنابراین، $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$، که در آن $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})$. در سایر موارد نیز، نامساوی (۱.۳) به دلیل اینکه $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathbb{Z}$، برقرار است. لذا تمام شرایط قضیه ۱.۳، برقرار بوده و $\hat{\xi}_*=0$ نقطه ثابت مشترک Φ و Ψ است.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $\Phi:\mathrm{V}\to\mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{V})$ یک چندتابعی $\mathbb{M}_\alpha$ ـ‌پذیرفتنی باشد. همچنین فرض کنید
آ). برای هر دو عضو دلخواه $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ و هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$، اعضای $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\Upsilon(\hat{\xi},\hat{\eta})$ چنان موجود باشند که

$$\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta}),$$

که در آن $\Upsilon(\hat{\xi},\hat{\eta})=\big\{\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi}),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Phi\hat{\eta})\big\}$؛
ب). به ازای هر $\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ و هر دنباله دلخواه $\{\hat{\xi}_{\mathrm{n}}\}_{\mathrm{n}\ge0}\subseteq\mathrm{V}$،

$$\mathbb{T}_1(\hat{\xi}_{\mathrm{n}+1},\hat{\xi}_{\mathrm{n}+2})\preceq\mathbb{T}_1(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\xi}_{\mathrm{n}+1}),\quad \mathbb{T}_2(\hat{\xi}_{\mathrm{n}+1},\hat{\eta})\mathbb{A}\preceq\mathbb{A}\mathbb{T}_2(\hat{\xi}_{\mathrm{n}},\hat{\eta}),\quad(\forall\mathrm{n}\ge0);$$

پ). عضو $\hat{\xi}_0\in\mathrm{V}$ و $\hat{\xi}_1\in\Phi\hat{\xi}_0$ موجود باشند به‌طوریکه $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_0,\hat{\xi}_1)\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_0)\succeq\mathbb{I}$.
در این صورت، اگر V نسبت به ماتریس $\mathbb{M}_\alpha$ ویژگی $\mathrm{B}^\star$ داشته باشد، آنگاه چندتابعی Φ دارای حداقل یک نقطه ثابت خواهد بود.

یکی از وجوه تمایز ساختار متری تعمیم‌یافته در این مقاله نسبت به چارچوب‌های قبلی، از جمله فضاهای متری مختلط‌مقدار [۱۸]، انعطاف‌پذیری و تعمیم‌پذیری مجموعه برد تابع متر است. در فضاهای متری با مقادیر مختلط، برد تابع متر زیرمجموعه‌ای از مخروط مرتب $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)\ge0,\mathrm{Im}(z)\ge0\}$ است و ترتیب جزئی روی آن با $z_1\precsim z_2\iff z_2-z_1\in\mathbb{C}_+$ مشخص می‌گردد. با توجه به یک‌ریختی طبیعی فضاهای مرتب بین $(\mathbb{C}_+,\precsim)$ و $(\mathrm{R}_+^2,\preceq)$ تحت نگاشت

$$\varrho:\mathbb{C}_+\to\mathrm{R}_+^2,\qquad\varrho(\mathrm{u}+\mathbf{i}\mathrm{v})=\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{v}\end{pmatrix},$$

نتایج مربوط به فضاهای مختلط‌مقدار در واقع حالت خاصی از ساختار بردارمقدار حاضر به ازای $\mathrm{r}=2$ هستند و هر متر با مقادیر مختلط نظیر $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathrm{d}_1(\hat{\xi},\hat{\eta})+\mathbf{i}\,\mathrm{d}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})$ را می‌توان جهت انجام محاسبات جبری و ضرب ماتریسی به طور معادل به صورت بردار ستونی $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\begin{pmatrix}\mathrm{d}_1(\hat{\xi},\hat{\eta})\\ \mathrm{d}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})\end{pmatrix}\in\mathrm{R}_+^2$ در نظر گرفت. علاوه

بر این، رویکرد بردارمقدار در $\mathrm{R}_{+}^{\mathrm{r}}$ با بهره‌گیری از ضرب ماتریسی ($\mathbb{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{r}\times\mathrm{r}}(\mathrm{R}_{+})$)، انعطاف‌پذیری و کنترل بسیار قوی‌تری برای تحلیل دستگاه‌ها و نگاشت‌ها با درجات آزادی $\mathrm{r} > ۲$ فراهم می‌آورد. برای تبیین ملموس این تعمیم و نحوه انطباق ساختارهای مختلط بر چارچوب برداری این مقاله، مثال زیر را به ازای $\mathrm{r} = ۲$ ارائه می‌دهیم.

مثال ۴.۳. فرض کنید $\mathrm{V} = \left\{\hat{\xi}\in\mathbb{C} : ۳ \le |\hat{\xi}| \le ۴\right\}$ و $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$. تابع $\delta_{\mathrm{p}} : \mathrm{V}\times\mathrm{V} \to \mathbb{C}^{+}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \begin{pmatrix} |\hat{\xi}-\hat{\eta}| \\ |\operatorname{Arg}(\hat{\xi}) - \operatorname{Arg}(\hat{\eta})|^{\frac{۳}{۲}} \end{pmatrix}, \quad (\forall \hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}).$$

بدیهی است که $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$، یک فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی با ماتریس‌های $\mathbb{T}_{\mathrm{j}}(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} \end{pmatrix}$ است. به‌منظور محاسبه شعاع طیفی ماتریس $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ داریم:

$$\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۶} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{pmatrix}.$$

معادله مشخصه این ماتریس به‌صورت $\det(\lambda I - \mathbb{T}_{۲}\mathbb{A}) = \lambda^{۲} - \left(\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۴}\right)\lambda + \frac{\sqrt{۲}}{۳} = ۰$ است که مقادیر ویژه آن برابرند با:

$$\lambda_{۱,۲} = \frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۸} \pm \frac{\sqrt{۱۵۳-۸۴\sqrt{۲}}}{۲۴}.$$

بنابراین، شعاع طیفی ماتریس حاصل برابر است با:

$$\rho\big(\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}\big) = \max\{|\lambda_{۱}|,|\lambda_{۲}|\} \approx ۰٫۹۷۲۲ < ۱.$$

در نتیجه، ماتریس‌های $\mathbb{A}$ و $\mathbb{T}_{۲}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ به صفر همگرا هستند و بند (ب) قضیه قبل برقرار است. فضای V را به مجموعه‌های $\mathrm{E}_{۱} = \left\{\hat{\xi}\in\mathrm{V} : ۰ < \operatorname{Arg}(\hat{\xi}) < \frac{\pi}{۲}\right\}$، $\mathrm{E}_{۲} = \left\{\hat{\xi}\in\mathrm{V} : \frac{\pi}{۲} \le \operatorname{Arg}(\hat{\xi}) \le \pi\right\}$، $\mathrm{E}_{۳} = \left\{\hat{\xi}\in\mathrm{V} : \pi < \operatorname{Arg}(\hat{\xi}) < \frac{۳\pi}{۲}\right\}$ و $\mathrm{E}_{۴} = \left\{\hat{\xi}\in\mathrm{V} : \frac{۳\pi}{۲} \le \operatorname{Arg}(\hat{\xi}) \le ۲\pi\right\}$ افراز کرده و چندتابعی $\Phi : \mathrm{V} \to \mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{V})$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\Phi\hat{\xi} = \begin{cases} \{-\hat{\mathrm{u}} : |\hat{\mathrm{u}}| \le |\hat{\xi}|, \operatorname{Arg}(\hat{\mathrm{u}}) = \operatorname{Arg}(\hat{\xi})\} & \hat{\xi}\in\mathrm{E}_{۱}\cup\mathrm{E}_{۳}, \\ \{\hat{\mathrm{u}} : |\hat{\mathrm{u}}| \le |\hat{\xi}|, \operatorname{Arg}(\hat{\mathrm{u}}) = \operatorname{Arg}(\hat{\xi})\} & \hat{\xi}\in\mathrm{E}_{۲}\cup\mathrm{E}_{۴}. \end{cases}$$

ماتریس $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ را برای هر $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathrm{E}_{۱}^{۲}\cup\mathrm{E}_{۳}^{۲}$، به صورت $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۴}{۳} \end{pmatrix}$، برای هر $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathrm{E}_{۱}\times\mathrm{E}_{۳}$، به صورت $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\eta},\hat{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{۳}{۴} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix}$، برای هر $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathrm{E}_{۲}^{۲}\cup\mathrm{E}_{۴}^{۲}$، که $\operatorname{Arg}(\hat{\xi}) = \operatorname{Arg}(\hat{\eta})$، به صورت $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \mathbb{I}$ تعریف نموده و در سایر موارد، قرار دهید $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \mathbb{Z}$. فرض کنید $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ چنان باشند که $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta}) \succeq \mathbb{I}$. بنا به تعریف ماتریس $\mathbb{M}_{\alpha}$، بررسی این شرط تنها در حالت‌هایی که این ماتریس بزرگتر مساوی ماتریس همانی $\mathbb{I}$ است کفایت می‌کند. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathrm{E}_{۱}^{۲}\cup\mathrm{E}_{۳}^{۲}$ باشد. در این صورت:

- اگر $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in \mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_1$ باشد، با توجه به ضابطه Φ، برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$، به دلیل اینکه Φ اعضا را با تغییر زاویه به اندازه π نگاشت می‌کند، داریم $\mathrm{Arg}(\hat{\mathrm{u}})=\mathrm{Arg}(\hat{\xi})+\pi\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ و $\mathrm{Arg}(\hat{\mathrm{v}})=\mathrm{Arg}(\hat{\eta})+\pi\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$. بنابراین $\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}}\in\mathrm{E}_3$ بوده و در نتیجه $(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\in\mathrm{E}_3\times\mathrm{E}_3$.
- به طریق مشابه، اگر $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathrm{E}_3\times\mathrm{E}_3$ باشد، برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$ خواهیم داشت $\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}}\in\mathrm{E}_1$ و لذا $(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\in\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_1$.

در هر دو صورت، $(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\in\mathrm{E}_1^2\cup\mathrm{E}_3^2$ است و بنا به ضابطه ماتریس، در این حالت‌ها $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=\mathbb{I}\succeq\mathbb{I}$ برقرار می‌باشد.

حالت دوم: $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathrm{E}_2^2\cup\mathrm{E}_4^2$ باشد. در این حالت: طبق ضابطه نگاشت Φ بر روی $\mathrm{E}_2\cup\mathrm{E}_4$، این نگاشت آرگومان نقاط را حفظ می‌کند. بنابراین اگر $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathrm{E}_2\times\mathrm{E}_2$ باشد، برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$ داریم $\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}}\in\mathrm{E}_2$ و چنانچه $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathrm{E}_4\times\mathrm{E}_4$ باشد، $\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}}\in\mathrm{E}_4$ خواهد بود. همچنین اگر $\mathrm{Arg}(\hat{\xi})\neq\mathrm{Arg}(\hat{\eta})$ باشد، آرگومان خروجی‌ها نیز نابرابر مانده و در نتیجه $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=\mathbb{I}\succeq\mathbb{I}$ برقرار می‌ماند.

سایر حالت‌ها: چنانچه $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_3$ باشد، مقدار ماتریس $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{5}{4} & 3\end{pmatrix}\succeq\mathbb{I}$ است.

در این صورت $\hat{\mathrm{u}}\in\mathrm{E}_3$ و $\hat{\mathrm{v}}\in\mathrm{E}_1$، که منجر به $(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\in\mathrm{E}_3\times\mathrm{E}_1$ می‌شود که طبق ضابطه مقدار آن برابر ماتریس همانی $\mathbb{I}$ است. در سایر نقاطی نیز که $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\not\succeq\mathbb{I}$ باشد، فرض شرط استلزام برقرار نبوده و نیازی به بررسی نیست.

بنابراین، چندتابعی Φ یک چندتابعی $\mathbb{M}_\alpha$–پذیرفتنی است. از طرفی، به ازای $\hat{\xi}_0\in\mathrm{E}_2\cup\mathrm{E}_4$ و هر $\hat{\xi}_1\in\Phi\hat{\xi}_0$، داریم $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_0,\hat{\xi}_1)=\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_0)\succeq\mathbb{I}$ و V نسبت به ماتریس $\mathbb{M}_\alpha$ ویژگی $\mathrm{B}^\star$ دارد. حال باید نشان دهیم که برای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$، چندتابعی Φ در شرط (آ) از نتیجه ۳.۳ صدق می‌کند. توجه کنید که اگر $\hat{\xi}=\hat{\eta}$ باشد، آنگاه با قرار دادن $\hat{\mathrm{u}}=\hat{\mathrm{v}}$، خواهیم داشت $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=0$ و لذا شرط مذکور برقرار خواهد بود. بنابراین، فرض کنید $\hat{\xi}\neq\hat{\eta}$. با انتخاب $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_3$، داریم

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=\begin{pmatrix}\inf_{\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}}|\hat{\xi}-\hat{\mathrm{u}}|\\ \inf_{\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}}\left|\mathrm{Arg}(\hat{\xi})-\mathrm{Arg}(\hat{\mathrm{u}})\right|^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left|\hat{\xi}-\left(\frac{-3\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|}\right)\right|\\ \left|\mathrm{Arg}(\hat{\xi})-\mathrm{Arg}\left(\frac{-3\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|}\right)\right|^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+|\hat{\xi}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix},$$

و به طور مشابه، $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Phi\hat{\eta})=\begin{pmatrix}3+|\hat{\eta}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$. لذا برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$، با قرار دادن $\hat{\mathrm{v}}=\frac{-3\hat{\eta}}{|\hat{\eta}|}\in\Phi\hat{\eta}$ خواهیم داشت:

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=\begin{pmatrix}\left|\hat{\mathrm{u}}+\frac{3\hat{\eta}}{|\hat{\eta}|}\right|\\ \left|\mathrm{Arg}(\hat{\mathrm{u}})-\mathrm{Arg}\left(\frac{-3\hat{\eta}}{|\hat{\eta}|}\right)\right|^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}3+|\hat{\mathrm{u}}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب، برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\eta}$، با در نظر گرفتن $\hat{\mathrm{v}}=\frac{-3\hat{\xi}}{|\hat{\xi}|}$ از $\Phi\hat{\xi}$ داریم $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\begin{pmatrix}3+|\hat{\mathrm{u}}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}$. بنابراین،

$$\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+|\hat{\mathrm{u}}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3(3+|\hat{\mathrm{u}}|)}{4}\\ \frac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+|\hat{\xi}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}(3+|\hat{\xi}|)+\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4}\\ \frac{1}{6}(3+|\hat{\xi}|)+\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2}\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}\frac{3(3+|\hat{\mathrm{u}}|)+\pi^{\frac{3}{2}}}{4}\\ \frac{3+|\hat{\mathrm{u}}|+3\pi^{\frac{3}{2}}}{6}\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}\frac{3(3+|\hat{\mathrm{u}}|)}{4}\\ \frac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix},$$

و مشابهاً،

$$\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+|\hat{\eta}|\\ \pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}\frac{3(3+|\hat{\mathrm{u}}|)}{4}\\ \frac{1}{2}\pi^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب، نتایج بالا زمانی که $(\hat{\eta},\hat{\xi})\in \mathrm{E}_{1}\times \mathrm{E}_{3}$، برقرار خواهد بود. اکنون، فرض کنید $\hat{\xi},\hat{\eta}\in \mathrm{E}_{1}$ $(\hat{\xi},\hat{\eta}\in \mathrm{E}_{3})$. در این صورت، $\Phi\hat{\xi}\times\Phi\hat{\eta}\subseteq \mathrm{E}_{4}^{2}$ $\big(\Phi\hat{\xi}\times\Phi\hat{\eta}\subseteq \mathrm{E}_{1}^{2}\big)$. لذا برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ می‌توان $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})=\begin{pmatrix}|\hat{\mathrm{u}}-\hat{\mathrm{v}}|\\ \big|\mathrm{Arg}(\hat{\mathrm{u}})-\mathrm{Arg}(\hat{\mathrm{v}})\big|^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}\preceq\begin{pmatrix}5\\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}.$$

از آنجا که $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=\begin{pmatrix}3+|\hat{\xi}|\\ \pi^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}$ و $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Phi\hat{\eta})=\begin{pmatrix}3+|\hat{\eta}|\\ \pi^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}$، لذا داریم

$$\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ (\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 1+\frac{4}{3}(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+|\hat{\xi}|\\ \pi^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3(3+|\hat{\xi}|)+\pi^{\frac{3}{4}}}{4}\\ \frac{(3+|\hat{\xi}|)+3\pi^{\frac{3}{4}}}{6}\end{pmatrix}\succeq\begin{pmatrix}5\\ 1+\frac{4}{3}(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix},$$

و نیز

$$\mathbb{A}\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Phi\hat{\eta})=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+|\hat{\eta}|\\ \pi^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}\succeq\begin{pmatrix}5\\ 1+\frac{4}{3}(\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{4}}\end{pmatrix}.$$

بنابراین، برای تمام حالت‌های فوق، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ که در آن $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ برابر با یکی از موارد $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi})$ و $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Phi\hat{\eta})$ است. در نهایت، اگر $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in \mathrm{E}_{2}^{2}\cup\mathrm{E}_{4}^{2}$، به‌طوریکه $\mathrm{Arg}(\hat{\xi})=\mathrm{Arg}(\hat{\eta})$، آنگاه $\Phi\hat{\eta}\subseteq\Phi\hat{\xi}$ یا $\Phi\hat{\xi}\subseteq\Phi\hat{\eta}$. بنابراین، به وضوح، برای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$، با انتخاب $\hat{\mathrm{v}}=\hat{\mathrm{u}}$، نامساوی (۱.۳) به ازای تمام مقادیر $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ برقرار است. همچنین، در انتخاب‌های دیگر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$، نامساوی (۱.۳) به ازای هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$، $\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\eta}$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$ برقرار است، چون $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathbb{Z}$. در نتیجه، تمام شرایط قضیه ۱.۳، برقرار بوده و هر $\hat{\xi}_{*}\in \mathrm{E}_{2}\cup\mathrm{E}_{4}$ یک نقطه ثابت برای چندتابعی Φ است.

تذکر ۵.۳. اگر ماتریس‌های $\mathbb{T}_{\mathrm{j}}$ برابر با ماتریس همانی $\mathbb{I}$ باشند، آنگاه فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی به فضای متریک برداری‌مقدار تبدیل شده و نتیجه زیر بدون نیاز به شرط (ب) از قضیه ۱.۳، حاصل می‌شود.

نتیجه ۶.۳. فرض کنید (V,d) فضای متریک برداری‌مقدار معمولی، $\mathbb{A}\in\mathrm{M}_{\mathrm{r,r}}(\mathrm{R}_{+})$ یک ماتریس همگرا به صفر و $\Phi,\Psi:\mathrm{V}\to\mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{V})$ جفت چندتابعی $\mathbb{M}_{\alpha}$ ـ‌پذیرفتنی باشند. همچنین فرض کنید
آ). برای هر دو عضو دلخواه $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ و $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ $(\hat{\mathrm{u}}\in\Psi\hat{\eta})$، دو عضو $\hat{\mathrm{v}}\in\Psi\hat{\eta}$ $(\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\xi})$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\Upsilon(\hat{\xi},\hat{\eta})$ چنان وجود داشته باشند که

$$\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathrm{d}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta}),$$

که در آن $\Upsilon(\hat{\xi},\hat{\eta})=\big\{\mathrm{d}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\mathrm{d}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi}),\mathrm{d}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})\big\}$؛
ب). دو عضو $\hat{\xi}_{\circ}\in\mathrm{V}$ و $\hat{\xi}_{1}\in\Phi\hat{\xi}_{\circ}$ چنان وجود داشته باشند که $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi}_{\circ},\hat{\xi}_{1})\succeq\mathbb{I}$ و $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi}_{1},\hat{\xi}_{\circ})\succeq\mathbb{I}$.
در این صورت، اگر V نسبت به $\mathbb{M}_{\alpha}$ ویژگی $\mathrm{B}^{\star}$ داشته باشد، آنگاه چند تابعی‌های Φ و Ψ حداقل یک نقطه ثابت مشترک خواهند داشت.

اگر در قضیه ۱.۳، برای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$، $\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathbb{I}$، آنگاه نتایج زیر حاصل می‌شوند.

نتیجه ۷.۳. فرض کنید $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$ یک فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی و ماتریس $\mathbb{T}_{2}(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ همگرا به صفر باشد که در آن $\mathbb{A}\in\mathrm{M}_{\mathrm{r,r}}(\mathrm{R}_{+})$. چندتابعی‌های $\Phi,\Psi:\mathrm{V}\to\mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{V})$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که برای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}$ و هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ $(\hat{\mathrm{u}}\in\Psi\hat{\eta})$، دو عضو $\hat{\mathrm{v}}\in\Psi\hat{\eta}$ $(\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\xi})$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\big\{\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi}),\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})\big\}$ چنان موجود باشند که $\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq\mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$. در این صورت، با فرض برقراری بند (ب) از قضیه ۱.۳، چندتابعی‌های Φ و Ψ دارای حداقل یک نقطه ثابت مشترک هستند.

نتیجه ۸.۳. فرض کنید (V,d) یک فضای متریک برداری‌مقدار معمولی، $\mathbb{A}\in \mathrm{M}_{\mathrm{r},\mathrm{r}}(\mathrm{R}_{+})$ ماتریس همگرا به صفر و $\Phi,\Psi:\mathrm{V}\to \mathrm{P}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{V})$ دو چندتابعی باشند. همچنین فرض کنید که برای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in \mathrm{V}$ و هر $\hat{\mathrm{u}}\in\Phi\hat{\xi}$ $(\hat{\mathrm{u}}\in\Psi\hat{\eta})$ دو عضو $\hat{\mathrm{v}}\in\Psi\hat{\eta}$ $(\hat{\mathrm{v}}\in\Phi\hat{\xi})$ و $\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\{\mathrm{d}(\hat{\xi},\hat{\eta}),\mathrm{d}(\hat{\xi},\Phi\hat{\xi}),\mathrm{d}(\hat{\eta},\Psi\hat{\eta})\}$ چنان موجود باشند که $\mathrm{d}(\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}})\preceq \mathbb{A}\mathrm{L}(\hat{\xi},\hat{\eta})$. در این صورت، چندتابعی‌های Φ و Ψ دارای حداقل یک نقطه ثابت مشترک هستند.

۴ کاربردها

در این بخش، با محوریت یک قضیه شرایط لازم جهت وجود جواب برای دستگاه شمول انتگرالی چندبعدی را ارائه می‌کنیم که بر پایه نتایج نقطه ثابت مشترک بدست آمده در بخش قبل است. فرض کنید $[\mathrm{a},\mathrm{b}]\subseteq \mathrm{R}^{+}$، $\mathcal{S}=\mathrm{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathrm{R}^{\mathrm{r}})$ و $\Lambda=\mathrm{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}]\times\mathrm{R}^{\mathrm{r}},\mathrm{R}^{\mathrm{r}})$. دستگاه شمول انتگرال کسری ریمان–لیوویل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\hat{\xi}(\mathrm{t})\in\left\{\hat{\mathrm{f}}_{\alpha}(\mathrm{t})+\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}(\mathrm{F}_{\alpha}(\mathrm{t},\hat{\xi}(\mathrm{t})))\right\}_{\alpha=1}^{\mathrm{k}_1},\\ \hat{\eta}(\mathrm{t})\in\left\{\hat{\mathrm{g}}_{\beta}(\mathrm{t})+\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}(\mathrm{G}_{\beta}(\mathrm{t},\hat{\eta}(\mathrm{t})))\right\}_{\beta=1}^{\mathrm{k}_2},\end{cases}\qquad(۱.۴)$$

که $\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2$ اعداد طبیعی هستند، $\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\mathrm{f}}_{\alpha},\hat{\mathrm{g}}_{\beta}\in\mathcal{S}$ و برای هر $\hat{\xi}(\mathrm{t})=(\hat{\xi}_1(\mathrm{t}),\cdots,\hat{\xi}_{\mathrm{r}}(\mathrm{t}))^{\mathsf{T}}$، نگاشت‌های $\mathrm{F}_{\alpha},\mathrm{G}_{\beta}$، به صورت

$$\mathrm{F}_{\alpha}(\mathrm{t},\hat{\xi}(\mathrm{t}))=\left(\mathrm{F}_{\alpha 1}(\mathrm{t},\hat{\xi}(\mathrm{t})),\cdots,\mathrm{F}_{\alpha\mathrm{r}}(\mathrm{t},\hat{\xi}(\mathrm{t}))\right)^{\mathsf{T}},\ \mathrm{G}_{\beta}(\mathrm{t},\hat{\eta}(\mathrm{t}))=\left(\mathrm{G}_{\beta 1}(\mathrm{t},\hat{\eta}(\mathrm{t})),\cdots,\mathrm{G}_{\beta\mathrm{r}}(\mathrm{t},\hat{\eta}(\mathrm{t}))\right)^{\mathsf{T}}$$

و با مؤلفه‌های $\mathrm{F}_{\alpha\mathrm{j}}(\mathrm{t},\hat{\xi}(\mathrm{t}))=\mathrm{F}_{\alpha\mathrm{j}}(\mathrm{t},\hat{\xi}_1(\mathrm{t}),\cdots,\hat{\xi}_{\mathrm{r}}(\mathrm{t}))$ به ازای هر $\mathrm{j}=1,2,\cdots,\mathrm{r}$ تعریف می‌شوند. همچنین

$$\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}\omega(\mathrm{t})=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}\frac{(\mathrm{t}-\mathrm{s})^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\omega(\mathrm{s})\mathrm{ds},\quad(\mathrm{t}\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]),$$

انتگرال کسری از تابع $\omega\in\mathrm{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathrm{R}^{\mathrm{r}})$ و از مرتبه $\sigma\in\mathrm{R}^{+}$ است. فرض کنید $\mathrm{V}=\mathrm{L}^{1}([\mathrm{a},\mathrm{b}],\mathrm{R}^{\mathrm{r}})$ فضای تمام توابع برداری r–بعدی انتگرال‌پذیر لبگ روی بازه $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ باشد که می‌توان آن را به صورت طبیعی با فضای حاصل‌ضرب $\left(\mathrm{L}^{1}[\mathrm{a},\mathrm{b}]\right)^{\mathrm{r}}$ یکی دانست؛ یعنی هر عنصر $\hat{\xi}\in\mathrm{V}$ به صورت بردار ستونی $\hat{\xi}(\mathrm{t})=\left(\hat{\xi}_1(\mathrm{t}),\ldots,\hat{\xi}_{\mathrm{r}}(\mathrm{t})\right)^{\mathsf{T}}$ نمایش داده می‌شود که در آن برای هر $\mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{r}$، مؤلفه $\hat{\xi}_{\mathrm{j}}\in\mathrm{L}^{1}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ است. علاوه بر این، برای هر تابع برداری $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_{\mathrm{r}})^{\mathsf{T}}\in\mathrm{V}$، عملگر انتگرال کسری ریمان–لیوویل از مرتبه $\sigma\in\mathrm{R}^{+}$ به صورت مؤلفه‌به‌مؤلفه به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}\omega(\mathrm{t})=\left(\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}\omega_1(\mathrm{t}),\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}\omega_2(\mathrm{t}),\ldots,\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}\omega_{\mathrm{r}}(\mathrm{t})\right)^{\mathsf{T}},$$

که در آن برای هر $\mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{r}$، داریم [۱۹]:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{a}}^{\sigma}\omega_{\mathrm{j}}(\mathrm{t})=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}\frac{(\mathrm{t}-\mathrm{s})^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}\omega_{\mathrm{j}}(\mathrm{s})\mathrm{ds},\quad(\mathrm{t}\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]).$$

متریک برداری‌مقدار $\delta_{\mathrm{p}}:\mathrm{V}\times\mathrm{V}\to\mathrm{R}^{\mathrm{r}}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\delta_{\mathrm{p}}(\hat{\xi},\hat{\eta})=\left(\parallel\hat{\xi}_1-\hat{\eta}_1\parallel_1^{\kappa_1},\parallel\hat{\xi}_2-\hat{\eta}_2\parallel_1^{\kappa_2},\cdots,\parallel\hat{\xi}_{\mathrm{r}}-\hat{\eta}_{\mathrm{r}}\parallel_1^{\kappa_{\mathrm{r}}}\right)^{\mathsf{T}},\quad(\forall\hat{\xi},\hat{\eta}\in\mathrm{V}),\qquad(۲.۴)$$

که $\hat{\xi}=(\hat{\xi}_1,\hat{\xi}_2,\cdots,\hat{\xi}_{\mathrm{r}})^{\mathsf{T}}$، $\hat{\eta}=(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2,\cdots,\hat{\eta}_{\mathrm{r}})^{\mathsf{T}}$، و به ازای هر $1\leq\mathrm{j}\leq\mathrm{r}$، $\parallel\hat{\xi}_{\mathrm{j}}-\hat{\eta}_{\mathrm{j}}\parallel_1=\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}|\hat{\xi}_{\mathrm{j}}(\mathrm{t})-\hat{\eta}_{\mathrm{j}}(\mathrm{t})|\mathrm{dt}$. بدیهی است که $(\mathrm{V},\delta_{\mathrm{p}})$ یک فضای متریک برداری‌مقدار دوبل‌کنترلی کامل با ماتریس‌های زیر است:

$$\mathbb{T}_1(\hat{\xi},\hat{\eta})=\mathbb{T}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})=\begin{pmatrix} 2^{\kappa_1-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^{\kappa_2-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2^{\kappa_r-1} \end{pmatrix}, \quad (\forall \hat{\xi},\hat{\eta}\in \mathrm{V}).$$

در ادامه قضیه‌ای ارائه می‌شود که بر اساس قضیه ۱.۳، شرایط لازم جهت تضمین وجود جواب برای دستگاه (۱.۴) را بیان می‌کند. برای تسهیل در روند اثبات قضیه، نتیجه شناخته‌شده زیر را در خصوص عملگر انتگرال کسری ریمان–لیوویل روی فضای $\mathrm{L}^1([a,b],\mathrm{R})$ یادآوری می‌کنیم.

لم ۱.۴ ([۱۹]). فرض کنید $\sigma>0$ و $\mathrm{h}\in \mathrm{L}^1([a,b],\mathrm{R})$ باشد. آنگاه عملگر انتگرال کسری ریمان–لیوویل کراندار بوده و نامساوی زیر برقرار است:

$$\| \mathrm{I}_a^{\sigma}\mathrm{h} \|_1 \le \frac{(b-a)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)} \| \mathrm{h} \|_1 .$$

اثبات. به مرجع [۱۹] مراجعه شود. □

قضیه ۲.۴. فرض کنید $\mathrm{V}=\mathrm{L}^1([a,b],\mathrm{R}^r)$ با متریک تعریف‌شده در رابطه (۲.۴) تجهیز شود که یک فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی کامل است. ماتریس قطری $\mathbb{A}=(a_{jj})_{j=1}^{r}$ را که $0\le a_{jj}\le \frac{1}{1+2^{\kappa_j-1}}$ و $\kappa_j\ge 1$، در نظر بگیرید. چندتابعی‌های $\Phi,\Psi:\mathrm{V}\to \mathrm{P_{cl}}(\mathrm{V})$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\Phi\hat{\xi}(\cdot)=\{\hat{f}_\alpha(\cdot)+\mathrm{I}_a^{\sigma}(\mathrm{F}_\alpha(\cdot,\hat{\xi}))\}_{\alpha=1}^{k_1}, \quad \Psi\hat{\eta}(\cdot)=\{\hat{g}_\beta(\cdot)+\mathrm{I}_a^{\sigma}(\mathrm{G}_\beta(\cdot,\hat{\eta}))\}_{\beta=1}^{k_2},$$

که $\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{f}_\alpha,\hat{g}_\beta\in \mathrm{V}$ و $\mathrm{F}_\alpha,\mathrm{G}_\beta:[a,b]\times \mathrm{V}\to \mathrm{R}^r$. ماتریس قطری $\mathbb{M}_\alpha(\hat{\xi},\hat{\eta})=\big(\mu(\hat{\xi}_j,\hat{\eta}_j)\big)_{j=1}^{r}$ را چنان در نظر بگیرید که جفت چندتابعی (Φ,Ψ)، $\mathbb{M}_\alpha$–پذیرفتنی باشند، V ویژگی $\mathrm{B}^\star$ نسبت به $\mathbb{M}_\alpha$ داشته و بند (پ) از قضیه ۱.۳ برقرار باشد. فرض کنید به ازای هر $\hat{\xi},\hat{\eta}\in \mathrm{V}$ و $(\hat{u}\in\Psi\hat{\eta})$ $\hat{u}=\hat{f}_\alpha+\mathrm{I}_a^{\sigma}(\mathrm{F}_\alpha(\cdot,\hat{\xi}))\in\Phi\hat{\xi}$، $(\hat{v}\in\Phi\hat{\xi})$ $\hat{v}=\hat{g}_\beta+\mathrm{I}_a^{\sigma}(\mathrm{G}_\beta(\cdot,\hat{\eta}))\in\Psi\hat{\eta}$ چنان موجود باشد که به ازای هر $t\in[a,b]$،

$$\big|\mathrm{F}_{\alpha j}(t,\hat{\xi}(t)))-\mathrm{G}_{\beta j}(t,\hat{\eta}(t)))\big|\le\frac{\Gamma(\sigma+1)}{(b-a)^{\sigma+1}}\Big[\big(\frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j,\hat{\eta}_j)}\big)|\hat{\xi}_j(t)-\hat{\eta}_j(t)|-|\hat{f}_{\alpha j}(t)-\hat{g}_{\beta j}(t)|\Big], \quad (۳.۴)$$

که در آن Γ تابع گاما است. لذا دستگاه شمول انتگرال کسری ریمان–لیوویل (۱.۴) دارای حداقل یک جواب است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم ماتریس $\mathbb{T}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ همگرا به صفر است. با توجه به تعریف ماتریس‌های قطری $\mathbb{T}_2=\mathrm{diag}(2^{\kappa_1-1},\dots,2^{\kappa_r-1})$ و $\mathbb{A}=\mathrm{diag}(a_{11},\dots,a_{rr})$، درایه‌های قطری ماتریس $\mathbb{T}_2A$ به صورت $(\mathbb{T}_2\mathbb{A})_{jj}=2^{\kappa_j-1}a_{jj}$ خواهند بود. با استفاده از فرض قضیه مبنی بر $a_{jj}\le\frac{1}{1+2^{\kappa_j-1}}$، داریم:

$$(\mathbb{T}_2\mathbb{A})_{jj}=2^{\kappa_j-1}a_{jj}\le\frac{2^{\kappa_j-1}}{1+2^{\kappa_j-1}}<1, \qquad (j=1,\dots,r).$$

بنابراین طبق قضیه ۶.۲، شعاع طیفی، $\rho(\mathbb{T}_2\mathbb{A})=\max_{1\le j\le r}(\mathbb{T}_2\mathbb{A})_{jj}<1$ بوده و در نتیجه ماتریس $\mathbb{T}_2(\hat{\xi},\hat{\eta})\mathbb{A}$ همگرا به صفر است و شرط (ب) از قضیه ۱.۳ برقرار می‌باشد. فرض کنید $\hat{\xi},\hat{\eta}\in \mathrm{V}$ دو عضو دلخواه باشند. از آنجا که چندتابعی‌های Φ و Ψ به صورت اجتماع متناهی از توابع پیوسته تعریف شده‌اند، مقادیر آن‌ها بسته و کراندار هستند. بر اساس قضیه گزینش اندازه‌پذیر (قضیه کوراتوفسکی–ریال–ناردزوسکی)[12] [۲۰]، وجود گزینش‌های انتگرال‌پذیر برای این نگاشت‌ها در فضای $\mathrm{L}^1([a,b],\mathrm{R}^r)$ تضمین می‌گردد. اکنون فرض کنید $\alpha\in\{1,\dots,k_1\}$ دلخواه باشد و عنصر $\hat{u}\in\Phi(\hat{\xi})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\hat{u}(t)=\hat{f}_\alpha(t)+\mathrm{I}_a^{\sigma}\big(\mathrm{F}_\alpha(t,\hat{\xi}(t))\big).$$

[12] Kuratowski–Ryll-Nardzewski

بنا به فرض قضیه، به ازای این α، اندیسی مانند $\beta \in \{۱, \ldots, k_۲\}$ وجود دارد که شرط (۳.۴) برقرار است. عنصر $\hat{v} \in \Psi(\hat{\eta})$ را متناظر با این β به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{v}(t) = \hat{g}_{\beta}(t) + I_a^{\sigma}\big(G_{\beta}(t, \hat{\eta}(t))\big).$$

حال برای هر مؤلفه $j = ۱, ۲, \ldots, r$، با استفاده از نامساوی مثلثی و خطی بودن عملگر انتگرال کسری داریم:

$$|\hat{u}_j - \hat{v}_j| \leq |\hat{f}_{\alpha j}(t) - \hat{g}_{\beta j}(t)| + \left|I_a^{\sigma}\Big(F_{\alpha j}(t, \hat{\xi}(t)) - G_{\beta j}(t, \hat{\eta}(t))\Big)\right|.$$

اکنون با انتگرال‌گیری روی بازه $[a, b]$ جهت محاسبه نورم $L^۱$ مؤلفه زام، به دست می‌آوریم:

$$\| \hat{u}_j - \hat{v}_j \|_۱ \leq \| \hat{f}_{\alpha j} - \hat{g}_{\beta j} \|_۱ + \| I_a^{\sigma}\big(F_{\alpha j}(\cdot, \hat{\xi}) - G_{\beta j}(\cdot, \hat{\eta})\big) \|_۱ .$$

در این مرحله، با استفاده از لم ۱.۴، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \| \hat{u}_j - \hat{v}_j \|_۱ &\leq \| \hat{f}_{\alpha j} - \hat{g}_{\beta j} \|_۱ + \frac{(b-a)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+۱)} \| F_{\alpha j}(\cdot, \hat{\xi}) - G_{\beta j}(\cdot, \hat{\eta}) \|_۱ \\ &= \| \hat{f}_{\alpha j} - \hat{g}_{\beta j} \|_۱ + \frac{(b-a)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+۱)} \int_a^b \big|F_{\alpha j}(t, \hat{\xi}(t)) - G_{\beta j}(t, \hat{\eta}(t))\big| dt. \end{aligned}$$

حال با جایگذاری شرط فرضی (۳.۴) در انتگرال فوق، به سادگی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \| \hat{u}_j - \hat{v}_j \|_۱ &\leq \| \hat{f}_{\alpha j} - \hat{g}_{\beta j} \|_۱ \\ &\quad + \frac{(b-a)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma+۱)} \int_a^b \frac{\Gamma(\sigma+۱)}{(b-a)^{\sigma}} \left[\Big(\frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j)}\Big)|\hat{\xi}_j(t) - \hat{\eta}_j(t)| - |\hat{f}_{\alpha j}(t) - \hat{g}_{\beta j}(t)|\right] dt \\ &= \| \hat{f}_{\alpha j} - \hat{g}_{\beta j} \|_۱ + \Big(\frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j)}\Big) \| \hat{\xi}_j - \hat{\eta}_j \|_۱ - \| \hat{f}_{\alpha j} - \hat{g}_{\beta j} \|_۱ \\ &= \Big(\frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j)}\Big) \| \hat{\xi}_j - \hat{\eta}_j \|_۱ . \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\kappa_j \geq ۱$، با به توان رساندن طرفین رابطه فوق به توان κ_j خواهیم داشت:

$$\| \hat{u}_j - \hat{v}_j \|_۱^{\kappa_j} \leq \Big(\frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j)}\Big)^{\kappa_j} \| \hat{\xi}_j - \hat{\eta}_j \|_۱^{\kappa_j} \leq \frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j)} \| \hat{\xi}_j - \hat{\eta}_j \|_۱^{\kappa_j},$$

(توجه داشته باشید که چون $۰ \leq \frac{a_{jj}}{\mu(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j)} < ۱$ و $\kappa_j \geq ۱$ است، نامساوی دوم برقرار است). از آنجا که این رابطه برای هر $j = ۱, \ldots, r$ برقرار است، با استفاده از تعریف متریک برداری (۲.۴) به دست می‌آوریم:

$$\mathbb{M}_{\alpha}(\hat{\xi}, \hat{\eta})\delta_p(\hat{u}, \hat{v}) \preceq \mathbb{A}\delta_p(\hat{\xi}, \hat{\eta}).$$

□

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، با معرفی چارچوب فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی، نتایج جدیدی در زمینه نقطه ثابت مشترک برای جفت چندتابعی‌های $\mathbb{M}_{\alpha}$–پذیرفتنی ارائه شد. با بهره‌گیری از این چارچوب تعمیم‌یافته، حل‌پذیری

دستگاه‌های شمول انتگرالی چندبعدی بررسی گردید و شرایط کافی برای وجود جواب‌ها مشخص شد. مهم‌ترین ویژگی این رویکرد، توانایی مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌های چندمؤلفه‌ای با رفتارهای ناهمگون است که در چارچوب‌های کلاسیک متریک امکان‌پذیر نبود. کنترل دوگانه در نامساوی مثلثی این فضا، انعطاف لازم را برای بازتاب دقیق ناهمگنی مؤلفه‌ها فراهم کرده و نتایج نظریه نقطه ثابت را به کاربردهای عملی در مدل‌های چندمعیاره تصمیم‌گیری و دستگاه‌های انتگرالی چندمتغیره تعمیم می‌دهد. علاوه بر این، توسعه مفهوم نگاشت‌های α–پذیرفتنی و تعمیم قضایای نقطه ثابت مرتبط، ابزار قدرتمندی برای تحلیل سیستم‌های پیچیده فراهم آورده و امکان بررسی همگرایی الگوریتم‌های تکراری در محیط‌های چندبعدی و برداری را میسر می‌سازد. در پایان، یافته‌های این مقاله نشان می‌دهد که ترکیب فضای متریک برداری‌مقدار دوکنترلی با نظریه نقطه ثابت مشترک، چارچوبی کارآمد و منعطف برای مطالعه سیستم‌های انتگرالی چندبعدی با ویژگی‌های ناهمسانگرد ارائه می‌دهد و مسیر پژوهش‌های آتی در توسعه الگوریتم‌های عددی و کاربرد در مدل‌سازی علمی و مهندسی را هموار می‌سازد.

مراجع

[۱] افشاری حجت، عبدالحسین‌زاده محسن، نصرتی منیره. نقاط ثابت مشترک برای نگاشت‌های چند–مقداری با به‌کاربردن نامساوی‌هایی روی دوجمله‌ای‌ها و سه‌جمله‌ای‌ها. پژوهش های ریاضی. ۱۴۰۱؛ ۸ (۲): ۳۸–۴۸. http://mmr.khu.ac.ir/article-۱-۳۱۳۹-fa.html

[2] Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22(1), 1–72. DOI: 10.1007/BF03018603.

[3] Bakhtin, I. A. (1989). The contraction mapping principle in quasimetric spaces. *Functional Analysis*, 30, 26–37.

[4] Perov, A. I. (1964). On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. *Priblizhennye Metody Resheniya Differentsial'nykh Uravnenii*, 2, 115–134.

[5] Boriceanu, M. (2009). Fixed point theory on spaces with vector-valued b-metrics. *Demonstratio Mathematica*, 42(4), 825–836.

[6] Rus, I. A. (1979). *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*. Editura Dacia, Cluj-Napoca.

[7] Hussain, N., and Taoudi, M. A. (2016). Fixed point theorems for multivalued mappings in ordered Banach spaces with application to integral inclusions. *Fixed Point Theory and Applications*, 2016(1), 65. DOI: 10.1186/s13663-016-0552-y.

[8] Türkoğlu, D., and Altun, I. (2007). A fixed point theorem for multi-valued mappings and its applications to integral inclusions. *Applied Mathematics Letters*, 20(5), 563–570. DOI: 10.1016/j.aml.2006.07.002.

[9] Boumaiza, M. (2017). Some fixed point theorems for multivalued mappings in Banach algebras and application to integral inclusions. *Turkish Journal of Mathematical Analysis and Number Theory*, 5(2), 69–79. DOI: 10.12691/tjant-5-2-5.

[10] Deza, M. M., and Deza, E. (2009). *Encyclopedia of Distances*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-00234-2.

[11] Cerdà-Uguet, M. A., Schellekens, M. P., and Valero, O. (2012). The Baire partial quasi-metric space: a mathematical tool for asymptotic complexity analysis in computer science. *Theory of Computing Systems*, 50(2), 387–399. DOI: 10.1007/s00224-010-9310-7.

[12] Petruşel, A., and Petruşel, G. (2025). Existence and stability theorems in vector-valued metric spaces for fixed point and coincidence point problems governed by multi-valued weak contractions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 206(3), 1–15. DOI: 10.1007/s10957-025-02758-6.

[13] Alansari, M., Almalki, Y., and Ali, M. U. (2023). Czerwik vector-valued metric space with an equivalence relation and extended forms of Perov fixed-point theorem. *Mathematics*, 11(16), 3583. DOI: 10.3390/math11163583.

[14] Zhukovskiy, E. S., and Panasenko, E. A. (2019). On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 305(1), S191–S203. DOI: 10.1134/S0081543819040199.

[15] Shukla, S., Dubey, N., and Miñana, J. J. (2024). Vector-valued fuzzy metric spaces and fixed point theorems. *Axioms*, 13(4), 252. DOI: 10.3390/axioms13040252.

[16] Piella, G. (2022). A framework to combine vector-valued metrics into a scalar-metric: Application to data comparison. *Applications of Mathematics*, 67(2), 143–152. DOI: 10.21136/AM.2021.0090-21.

[17] Vasilyeva, E., Romance, M., Samoylenko, I., Kovalenko, K., Musatov, D., Raigorodskii, A. M., and Boccaletti, S. (2023). Distances in higher-order networks and the metric structure of hypergraphs. *Entropy*, 25(6), 923. DOI: 10.3390/e25060923.

[18] Amiri, P., and Afshari, H. (2022). Common fixed point results for multi-valued mappings in complex-valued double controlled metric spaces and their applications to the existence of solution of fractional integral inclusion systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 154, 111622. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111622.

[19] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

[20] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.