دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوازدهم، شماره شصت و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۵
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ارزیابی کارایی در متاتکنولوژی کاب-داگلاس تحت تحدب لگاریتمی درون‌گروهی

محمود مهدیلو[1*]، علی جمشیدی[2]

(۱) گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد اصفهان (خوراسگان)، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۱۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۶/۲۶

چکیده

روش اصل موضوعی مورد استفاده در تحلیل پوششی داده‌ها برای مدل‌سازی تکنولوژی تولید مبتنی بر اصل برونیابی حداقل است. در این روش، مدل تکنولوژی تولید واقعی به‌صورت اشتراک همه تکنولوژی‌هایی تعریف می‌شود که در یک دسته مشخص از اصول توصیف‌کننده تکنولوژی واقعی صدق می‌کنند. مدل حاصل از این روش کوچکترین تکنولوژی برآوردکننده اصول مفروض است. در این مقاله، از این روش برای مدل‌سازی یک متاتکنولوژی کاب-داگلاس جدید با فرض تحدب لگاریتمی تکنولوژی‌های گروهی آن استفاده می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا اصول مورد نیاز برای توصیف متاتکنولوژی بر پایه ویژگی‌های خود متاتکنولوژی را معرفی و تشریح می‌کنیم. با استفاده از این اصول، متاتکنولوژی جدید و تکنولوژی‌های گروهی آن را تحت فرض بازده به مقیاس متغیر تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که متاتکنولوژی کاب-داگلاس برابر با اجتماع تکنولوژی‌های کاب-داگلاس است بطوریکه هر یک توسط واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده در آن تکنولوژی گروهی تولید شده است. سپس، نشان می‌دهیم که این متاتکنولوژی لزوماً لگاریتمی محدب نیست، با وجود اینکه تکنولوژی‌های گروهی آن واجد این خاصیت هستند. در ادامه، متاتکنولوژی کاب-داگلاس را به‌صورت یک مجموعه از بردارهای ورودی-خروجی برآوردکننده مجموعه‌ای از شرایط جبری بیان و با مثال عددی تشریح می‌کنیم. در نهایت، از توصیف جبری ارائه شده برای اندازه‌گیری کارایی ورودی واحدهای تصمیم‌گیرنده در متاتکنولوژی کاب-داگلاس استفاده می‌کنیم و یک روش تک‌مرحله‌ای بسط می‌دهیم. در روش پیشنهادی، کارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی تنها با حل یک مسئله بهینه‌سازی خطی محاسبه می‌شود. نتایج ارائه شده با استفاده از مثال عددی تشریح می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: متاتکنولوژی، تحدب لگاریتمی درون‌تکنولوژی، تحلیل پوششی داده‌ها، اصل برونیابی حداقل، کارایی، بهینه‌سازی خطی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: m.mehdiloo@uma.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها به عنوان یک ابزار تحلیلی قدرتمند، نقش موثری در پیشرفت روش‌های ارزیابی عملکرد ایفا نموده و با ارائه ارزیابی‌های جامع از عملکرد جایگاه ویژه‌ای یافته است. از زمان ابداع این روش توسط چارنز و همکاران [1]، کاربرد آن در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده در بخش‌های مختلف از جمله بانکداری، نظام سلامت، کشاورزی، حمل‌ونقل و آموزش مورد توجه قرار گرفته است [2].

یک فرض مشترک و اساسی در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها تجانس واحدهای تصمیم‌گیرنده است. این فرض به این معناست که همه واحدهای تصمیم‌گیرنده نوع یکسانی از محصولات یا خدمات (خروجی‌ها) را با استفاده از نوع یکسانی از منابع (ورودی‌ها) تولید می‌کنند. همچنین، محیط فعالیت این واحدها در جهت ارزیابی کارایی تقریباً مشابه است [3–5].

اودُنِل و همکاران [6] عدم برقراری فرض تجانس در مواردی از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها را استدلال کرده و مفهوم متاتکنولوژی را برای مواجهه با چنین کاربردهایی پیشنهاد می‌کنند. در روش پیشنهادی آنها، واحدهای تصمیم‌گیرنده به چندین گروه تقسیم‌بندی می‌شوند، بطوریکه واحدهای تصمیم گیرنده در هر گروه به میزان کافی متجانس در نظر گرفته می‌شوند و یک تکنولوژی گروهی را ایجاد می‌کنند. سپس، اجتماع تکنولوژی‌های گروهی به عنوان متاتکنولوژی تعریف می‌شود. مدل‌سازی متاتکنولوژی بر مبنای این تعریف یک روش پایین-به-بالا است.

روش غیرپارامتری مورد استفاده در چارچوب استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها برای مدل‌سازی تکنولوژی واقعی تولید روش اصل موضوعی مبتنی بر اصل برونیابی حداقل است. در این روش، مدل تکنولوژی تولید واقعی به‌صورت اشتراک همه تکنولوژی‌هایی تعریف می‌شود که در یک دسته مشخص از اصول توصیف‌کننده تکنولوژی واقعی صدق می‌کنند. مهدیلو و همکاران [7] چگونگی بکارگیری روش بالا برای مدل‌سازی متاتکنولوژی را مورد بحث و بررسی قرار داده و یک روش بالا-به-پایین برای مدل‌سازی ارائه می‌کنند که مبتنی بر اصول توصیف‌کننده متاتکنولوژی است. انگیزه آنها برای ارائه روش پیشنهادی این است که روش پایین-به-بالا مبتنی بر اصول توصیف‌کننده تکنولوژی‌های گروهی است و نه اصول توصیف‌کننده خود متاتکنولوژی، و این باعث ایجاد سوالات و ابهاماتی می‌شود که بایستی رفع شوند. برای رفع این ایرادات، مهدیلو و همکاران [7] تعبیر جدیدی از متاتکنولوژی را ارائه می‌دهند، بطوریکه هیچ ارتباط از پیش تعیین شده‌ای میان متاتکنولوژی و تکنولوژی‌های گروهی آن در نظر گرفته نمی‌شود. در عوض، آنها ثابت می‌کنند که توصیف ساختاری هر متاتکنولوژی تحت فرض تحدب تکنولوژی‌های گروهی (تحدب درون‌گروهی) به‌صورت اجتماع تکنولوژی‌های گروهی آن است. روش مدل‌سازی آنها مبتنی بر اعمال اصل برونیابی حداقل در سطح خود متاتکنولوژی است و منطبق با همان شیوه مورد استفاده در تحلیل پوششی داده‌ها است. در ادامه، آنها یک توصیف جبری جدید از متاتکنولوژی مذکور را بسط می‌دهند و بر مبنای این توصیف، مدل‌های بهینه‌سازی خطی برای ارزیابی کارایی‌های تکنیکی و اقتصادی ارائه می‌کنند.

رویکرد متاتکنولوژی به‌طور گسترده و تجربی در بخش‌ها و حتی حوزه‌های علمی مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. (برای مرور تازه‌ای در این زمینه، به [8] مراجعه شود.) کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده در متاتکنولوژی نسبت به تکنولوژی گروهی که در آن قرار دارد و نیز نسبت به خود متاتکنولوژی بترتیب *کارایی درون‌گروهی* و *متاکارایی* نامیده می‌شوند. همچنین، شکاف بین این دو نوع کارایی، به عنوان شاخصی از ماهیت محدودکننده محیط گروهی تفسیر می‌شود [5].

یکی از اصول مهم و تاثیرگذار در ارزیابی متاکارایی، انتخاب نوع تحدب حاکم بر متاتکنولوژی است. بر این اساس، تا کنون سه نوع از متاتکنولوژی‌ها مدل‌سازی شده‌اند: (۱) متاتکنولوژی نامحدب حاصل از عدم اعمال هر گونه فرض

تحدب، (۲) متاتکنولوژی نامحدب مبتنی بر اعمال فرض تحدب درون‌گروهی، (۳) متاتکنولوژی محدب مبتنی بر اعمال تحدب‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی. (برای جزئیات بیشتر درباره مدل‌سازی این متاتکنولوژی‌ها، به [7] مراجعه شود.) در یک بررسی نظری و تحلیل تجربی، کرستنز و همکاران [9] اثبات می‌کنند که اعمال تحدب بین‌گروهی، به شکل معناداری موجب بروز انحراف و جهت‌گیری در ارزیابی متاکارایی می‌شود.

نکته قابل توجه درباره تکنولوژی‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها این است که اغلب آنها بر این اصل استوار هستند که تکنولوژی تولید یک مجموعه محدب است. یک مثال رایج از تکنولوژی‌های محدب، تکنولوژی استاندارد بازده-به-مقیاس متغیر پیشنهادی بَنکِر و همکاران [10] است که منشأ پیدایش آن را می‌توان در [11–13] یافت. در این تکنولوژی، بازده به مقیاس در بخش‌های مختلف مرز قطعه-قطعه خطی آن افزایشی، ثابت یا کاهشی است.

علیرغم محبوبیت تکنولوژی استاندارد بازده-به-مقیاس متغیر، موقعیت‌هایی وجود دارد که ممکن است استفاده از این تکنولوژی مناسب نباشد. به عنوان مثال، تقریب یک تکنولوژی واقعی غیرمحدب را در نظر بگیرید که مرز آن همه جا مقعر نیست و بهره‌وری حاشیه‌ای در آن نواحی افزایشی است. در چنین موقعیتی، استفاده از تکنولوژی مذکور به عنوان مدل تکنولوژی واقعی دقیق و قابل قبول نیست، زیرا مرز تولید در این مدل مقعر است و لذا بهره‌وری حاشیه‌ای در سراسر مرز غیر افزایشی است.

بنابراین، این سوال پیش می‌آید که اگر در یک کاربرد تجربی دلایلی مبنی بر افزایشی بودن بهره‌وری حاشیه‌ای در برخی نواحی مرزی وجود داشته باشد، جایگزین مناسب برای اصل تحدب معمولی در مدل‌سازی تکنولوژی تولید واقعی چیست؟ در پاسخ، بنکر و مایندیراتا [14] فرض تحدب لگاریتمی را به عنوان جایگزین معرفی می‌کنند تا امکان افزایشی، ثابت و کاهشی بودن همزمان بهره‌وری حاشیه‌ای در مرز تولید را فراهم کنند. مدل پیشنهادی آنها تکنولوژی کاب-داگلاس است که مرز آن بطور قطعه-قطعه لگاریتمی خطی است.

تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس مرتبط با دسته‌ای از مدل‌های ارزیابی کارایی در تحلیل پوششی داده‌هاست که به مدل‌های ضربی معروف هستند و توسط چارنز و همکاران [15] بر اساس اصل پوشش لگاریتمی-خطی معرفی شده توسط بنکر و همکاران [16] بسط یافته‌اند. تکنولوژی کاب-داگلاس به اندازه کافی انعطاف‌پذیر است بطوریکه می‌تواند هر سه حالت تحدب، آفینی و تقعر در مرز تولید را به‌صورت همزمان نمایان کند [17]. برای اطلاعات بیشتر، به [17 ,18] و منابع آنها مراجعه شود.

تا جایی که ما می‌دانیم، هیچ یک از مدل‌های موجود متاتکنولوژی در تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر فرض تحدب لگاریتمی نیست. با توجه به اهمیت انتخاب نوع تحدب متاتکنولوژی، هدف اصلی این مقاله معرفی و مدل‌سازی یک متاتکنولوژی کاب-داگلاس جدید بر پایه اصل تحدب لگاریتمی بین‌گروهی و استفاده از آن برای اندازه‌گیری متاکارایی تعریف می‌شود. برای دستیابی به این هدف، ابتدا اصول توصیف کننده متاتکنولوژی کاب داگلاس را معرفی و تشریح می‌کنیم. با استفاده از این اصول، متاتکنولوژی کاب-داگلاس و تکنولوژی‌های گروهی آن را تحت فرض بازده به مقیاس متغیر تعریف می‌کنیم.

ثابت می‌کنیم که اجتماع تکنولوژی‌های کاب-داگلاس تولید شده توسط واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده در زیرگروه متناظر آن تکنولوژی گروهی یک توصیف ساختاری از متاتکنولوژی کاب-داگلاس است. همچنین، نشان می‌دهیم که متاتکنولوژی کاب-داگلاس لزوماً لگاریتمی محدب نیست، با وجود اینکه تکنولوژی‌های گروهی آن این ویژگی را دارند. در ادامه، یک توصیف جبری جدید از متاتکنولوژی کاب-داگلاس را ارائه و آن را با یک مثال عددی تشریح می‌کنیم. با استفاده از توصیف جبری ارائه شده، متاکارایی شعاعی ورودی واحدهای تصمیم‌گیرنده در متاتکنولوژی کاب-داگلاس را بررسی و دو روش (یکی چندمرحله‌ای و دیگری تک‌مرحله‌ای) ارائه می‌کنیم.

در روش اول، محاسبه متاکارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی مبتنی بر توصیف ساختاری متاتکنولوژی کاب-داگلاس است. در این روش، متاکارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی برابر با مینیمم مقدار کارایی‌های درون‌گروهی ورودی این واحد نسبت به تکنولوژی‌های گروهی‌اش است. مسائل بهینه‌سازی مورد نیاز در این روش همگی از نوع خطی و تعداد آنها برابر با تعداد گروه‌ها است.

روش دوم بر مبنای توصیف جبری متاتکنولوژی کاب-داگلاس پیاده‌سازی می‌شود. در این روش، متاکارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی تنها با حل یک مسئله بهینه‌سازی اندازه‌گیری می‌شود. اگرچه این مسئله یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مختلط است، ثابت می‌کنیم که معادل با یک مسئله بهینه‌سازی خطی است. بنابراین، محاسبه متاکارایی کاب-داگلاس با حل تنها یک مسئله بهینه‌سازی خطی امکان‌پذیر است. چون حل مسائل بهینه‌سازی خطی با استفاده از نرم‌افزارهای رایج بهینه‌سازی براحتی قابل اجرا است، استفاده از مدل پیشنهادی ما برای محاسبه متاکارایی کاب-داگلاس از دید عملی کارا و به سادگی قابل اجرا است. همچنین، از لحاظ محاسباتی، نسبت به روش اول کاراتر است.

ساختار ادامه این مقاله در ادامه بصورت زیر است. بخش دوم نمادگذاری‌های مورد استفاده در این مقاله را معرفی می‌کند. سپس، مقدمات لازم از تکنولوژی تولید و مدل‌سازی اصل موضوعی تکنولوژی کاب-داگلاس در چارچوب استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها را ارائه می‌کند. همچنین، اندازه‌گیری کارایی شعاعی در تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس را یادآوری می‌کند. بخش سوم مدل‌سازی اصل موضوعی متاتکنولوژی کاب-داگلاس تحت فرض تحدب لگاریتمی تکنولوژی‌های گروهی را بررسی و توصیف جبری این متاتکنولوژی را ارائه می‌دهد. همچنین، نتایج ارائه شده را با یک مثال عددی تشریح می‌کند. بخش چهارم دو روش برای اندازه‌گیری متاکارایی کاب-داگلاس ارائه می‌دهد. بخش پنجم روش‌های پیشنهادی در بخش چهارم را برای مثال عددی بخش سوم اجرا و نتایج را تفسیر می‌کند. بخش ششم شامل نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای انجام پژوهش‌های آتی است.

۲- مقدمات

۲-۱- نمادگذاری و تکنولوژی تولید

در این زیربخش، نمادهای مورد استفاده در این مقاله را معرفی می‌کنیم. برای هر عدد صحیح $d \geq 1$، فضای اقلیدسی d-بعدی را با $\mathbb{R}^d$ و متعامدکنج‌های نامنفی و مثبت آن را بترتیب با $\mathbb{R}^d_+$ و $\mathbb{R}^d_{++}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌ها را با حروف بزرگ خوش‌نویس $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ و بردارها را با حروف کوچک برجسته $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ نمایش می‌دهیم.

برای $i = 1, \ldots, d$، مولفه i-ام بردار $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ را با حرف کوچک مورب به‌صورت a_i نشان می‌دهیم. بردارهای صفر و یک که همه مولفه‌های آنها بترتیب برابر صفر و یک هستند را با $\mathbf{0}$ و $\mathbf{1}$ نشان می‌دهیم. بعد این بردارها از موقعیت مورد استفاده استنباط می‌شود. فرض می‌کنیم که همه بردارها ستونی هستند و برای نمایش ترانهاده آنها از بالانویس T استفاده می‌کنیم.

از نمادهای $\boldsymbol{a}^p$ و $\ln(\boldsymbol{a})$ بترتیب برای نمایش توان p-ام و لگاریتم مولفه‌ای بردار $\boldsymbol{a}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین، $\boldsymbol{a}^p = (a_1^p, \ldots, a_d^p)^T$ و $\ln(\boldsymbol{a}) = (\ln a_1, \ldots, \ln a_d)^T$. برای دو بردار $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$، نامساوی برداری $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$) به این معنی است که نامساوی اسکالری $a_i \geq b_i$ ($a_i > b_i$) برای همه اندیس‌های $i = 1, \ldots, d$ برقرار است.

تکنولوژی (یا مجموعه امکان تولید) $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s_+$ با $m \geq 1$ ورودی و $s \geq 1$ خروجی را در نظر می‌گیریم.

هر عضو تکنولوژی $\mathcal{T}$ یک واحد تصمیم‌گیرنده $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ است، بطوریکه $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$ و $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_s)^T$ بترتیب بردارهای ورودی و خروجی این واحد هستند.

در چارچوب مفهومی، تکنولوژی $\mathcal{T}$ به‌صورت مجموعه همه واحدهای تصمیم‌گیرنده $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ تعریف می‌شود، بطوریکه بردار خروجی $\boldsymbol{y}$ را می‌توان با بردار ورودی $\boldsymbol{x}$ تولید کرد:

$$\mathcal{T} = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}_{+}^{m} \times \mathbb{R}_{+}^{s} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \text{ می‌تواند } \boldsymbol{y} \text{ را تولید کند} \right\}. \qquad (۱)$$

متناظر با تکنولوژی $\mathcal{T}$، تکنولوژی مثبت $\mathcal{T}_{++}$ و تکنولوژی نپری $\mathcal{T}_{ln}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{T}_{++} = \mathcal{T} \cap (\mathbb{R}_{++}^{m} \times \mathbb{R}_{++}^{s}), \qquad \mathcal{T}_{ln} = \left\{ (\ln(\boldsymbol{x}), \ln(\boldsymbol{y})) \middle| \, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{++} \right\}.$$

فرض می‌کنیم یک مجموعه $\mathcal{N}$ متشکل از J واحد تصمیم‌گیرنده مشاهده شده (مشاهدات) داریم که آنها را به‌صورت $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j)$، $j \in \mathcal{J} = \{1, \dots, J\}$، نشان می‌دهیم. بعلاوه، برای هر $j \in \mathcal{J}$، فرض می‌کنیم که بردارهای ورودی و خروجی واحد j-ام مثبت هستند؛ یعنی، $\boldsymbol{x}_j > \boldsymbol{0}$ و $\boldsymbol{y}_j > \boldsymbol{0}$.

واحد تصمیم‌گیرنده‌ای که کارایی آن تحت ارزیابی است، با $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \in \mathcal{T}$ نشان داده می‌شود. در کاربردهای واقعی، این واحد تصمیم‌گیرنده معمولاً یکی از واحدهای مشاهده‌شده است. ولی، ما چنین فرضی نمی‌کنیم، و لذا این واحد تصمیم‌گیرنده می‌تواند مشاهده‌شده یا مشاهده‌نشده باشد. فرض می‌کنیم که بردارهای ورودی و خروجی واحد تحت ارزیابی مثبت هستند؛ یعنی، $\boldsymbol{x}_o > \boldsymbol{0}$ و $\boldsymbol{y}_o > \boldsymbol{0}$.

۲-۲- تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس

در بخش بعدی این مقاله، مدل‌سازی اصل موضوعی متاتکنولوژی کاب-داگلاس را بررسی می‌کنیم که نقطه شروع آن تعریف اصل موضوعی تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس و توصیف جبری معادل آن است و لذا این زیربخش به آنها پرداخته می‌پردازد. انگیزه معرفی تکنولوژی کاب-داگلاس این است که برخلاف تکنولوژی استاندارد بازده-به-مقیاس متغیر که توسط بنکر و همکاران [10] ارائه شده است، امکان افزایش، ثابت بودن و کاهش بهره‌وری حاشیه‌ای در طول مرز تکنولوژی را فراهم می‌کند و می‌تواند هر سه حالت تحدب، خطی بودن و تقعر در مرز تولید را به‌صورت همزمان نمایان کند [17]. برای تعریف تکنولوژی کاب-داگلاس، ابتدا تعریف اصل برونیابی حداقل را یادآوری می‌کنیم که متعلق به آفرییت [11] و بنکر و همکاران [10] است.

تعریف ۲-۱ فرض کنید $\mathbb{T}$ مجموعه همه تکنولوژی‌هایی است که توسط مجموعه‌ای از مشاهدات تولید می‌شوند و مجموعه‌ای مشخص از اصول تولید را برآورده می‌کنند. در این صورت، تکنولوژی $\mathcal{T}_{\min} \in \mathbb{T}$ *اصل برونیابی حداقل* بر مبنای اصول مذکور را برآورده می‌کند اگر برای هر تکنولوژی $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$، رابطه $\mathcal{T}_{\min} \subseteq \mathcal{T}$ برقرار باشد.

با توجه به تعریف ۲-۱، فرض می‌کنیم $\mathbb{T}^{\mathrm{CD}}$ مجموعه همه تکنولوژی‌های $\mathcal{T}$ است که در سه اصل زیر صدق می‌کنند:

اصل الف (*شمول مشاهدات*) به ازای هر $j \in \mathcal{J}$، داریم $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in \mathcal{T}$.

اصل ب (*امکان‌پذیری قوی*) اگر $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}$، آنگاه $(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{T}$ برای هر $\widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}$ و هر $\boldsymbol{0} \leq \widetilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$.

اصل پ (*تحدب لگاریتمی*) تکنولوژی مثبت $\mathcal{T}_{++}$ لگاریتمی محدب است: به ازای هر $(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{y}}), (\widetilde{\boldsymbol{x}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{T}_{++}$ و هر $\alpha \in (0,1)$، داریم $(\widehat{\boldsymbol{x}}^{\alpha} \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1-\alpha)}, \widehat{\boldsymbol{y}}^{\alpha} \widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1-\alpha)}) \in \mathcal{T}_{++}$.

اصول الف و ب بترتیب اصل شمول مشاهدات و اصل امکان‌پذیری قوی ورودی‌ها و خروجی‌ها نامیده می‌شوند. این دو اصل با اصول متناظر در تعریف تکنولوژی استاندارد بازده-به-مقیاس متغیر یکسان هستند. ولی اصل پ، فرض تحدب معمولی را با فرض تحدب لگاریتمی جایگزین می‌کند. نکته قابل توجه راجع به این اصل این است که تحدب

لگاریتمی تکنولوژی مثبت $\mathcal{T}_{++}$ معادل با تحدب معمولی تکنولوژی نپری $\mathcal{T}_{ln}$ است. با استفاده از سه اصل بیان شده، تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۲ تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس $\mathcal{T}^{\text{CD}}$ اشتراک همه تکنولوژی‌هایی است که در اصول الف-پ صدق می‌کنند:

$$\mathcal{T}^{\text{CD}} := \bigcap_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}^{\text{CD}}} \mathcal{T}. \qquad (۲)$$

می‌توان نشان داد که خود تکنولوژی $\mathcal{T}^{\text{CD}}$ در هر سه اصل الف، ب و پ صدق می‌کند، و لذا $\mathcal{T}^{\text{CD}} \in \mathbb{T}^{\text{CD}}$. بنا بر تعریف (۲)، این تضمین می‌کند که $\mathcal{T}^{\text{CD}}$ کوچکترین تکنولوژی برآورده‌کننده اصول استفاده شده در تعریف آن است. بنابراین، این تکنولوژی شامل هیچ واحد تصمیم‌گیرنده غیرقابل توصیف با اصول الف، ب و پ نیست. قضیه زیر یک توصیف جبری برای تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس ارائه می‌دهد.

قضیه ۲-۱ تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس $\mathcal{T}^{\text{CD}}$ برابر است با مجموعه همه $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} \boldsymbol{x}_j^{\lambda_j} \leq \boldsymbol{x}, \prod_{j\in\mathcal{J}} \boldsymbol{y}_j^{\lambda_j} \geq \boldsymbol{y}, \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j = 1, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}. \qquad (۳)$$

۲-۳ کارایی شعاعی در تکنولوژی کاب-داگلاس

در این بخش اندازه‌گیری کارایی شعاعی (فارل) در تکنولوژی کاب-داگلاس با رویکرد ورودی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۲-۳ یک واحد تصمیم‌گیرنده $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}$ کارای شعاعی ورودی نامیده می‌شود اگر هیچ $\theta < 1$ موجود نباشد بطوریکه $(\theta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}$.

بنا بر تعریف ۲-۳، کارایی شعاعی ورودی واحد تصمیم‌گیرنده $(\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o)$ در تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس $\mathcal{T}^{\text{CD}}$ برابر با مقدار بهینه مسئله بهینه‌سازی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \theta_o = \min\ & \theta \\ \text{subject to}\ & \\ & (\theta\boldsymbol{x}_o,\boldsymbol{y}_o) \in \mathcal{T}^{\text{CD}} \\ & \theta \text{ sign free.} \end{aligned} \qquad (۴)$$

با استفاده از قضیه ۲-۱، مسئله بهینه‌سازی (۴) را می‌توان به صورت معادل زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} \theta_o = \min\ & \theta \\ \text{subject to}\ & \\ & \prod_{j\in\mathcal{J}} \boldsymbol{x}_j^{\lambda_j} \leq \theta\boldsymbol{x}_o, \\ & \prod_{j\in\mathcal{J}} \boldsymbol{y}_j^{\lambda_j} \geq \boldsymbol{y}_o, \\ & \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j = 1, \\ & \theta \text{ sign free}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \qquad (۵)$$

می‌توان نشان داد که مقدار بهینه θ_o در مسئله (۵) در نامساوی $0 < \theta_o \leq 1$ صدق می‌کند. بنابراین، واحد تصمیم‌گیرنده $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ در تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس $\mathcal{T}^{\mathrm{CD}}$ کارای شعاعی ورودی است اگر و فقط اگر $\theta_o = 1$.

اگرچه مسئله (۵) یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی است، با تغییر متغیر $\varphi := -\ln(\theta)$ می‌توان آن را بطور معادل به مسئله بهینه‌سازی خطی زیر تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
\varphi_o = \max\ & \varphi \\
\text{subject to}\ & \\
& \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j \ln(\boldsymbol{x}_j) \leq \ln(\boldsymbol{x}_o) - \varphi, \\
& \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j \ln(\boldsymbol{y}_j) \geq \ln(\boldsymbol{y}_o), \\
& \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j = 1, \\
& \varphi \text{ sign free}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

اگر φ^* و $\boldsymbol{\lambda}^*$ جواب بهینه مسئله (۶) باشد، آنگاه $\theta' = \exp(-\varphi^*)$ و $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}^*$ یک جواب بهینه برای مسئله (۵) خواهد بود. بنابراین، داریم:

$$\theta_o = \exp(-\varphi_o). \tag{۷}$$

در نتیجه، اندازه کارایی شعاعی ورودی θ_o در تکنولوژی کاب-داگلاس $\mathcal{T}^{\mathrm{CD}}$ را می‌توان با حل مسئله بهینه‌سازی خطی (۶) و استفاده از رابطه (۷) بدست آورد.

۳- متاتکنولوژی کاب-داگلاس

روش معمول برای مدل‌سازی اکثر تکنولوژی‌های تولید در حوزه تولید غیرپارامتری استاندارد، روشی است که در بخش ۲-۲ برای تقریب تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس بکار گرفته شد. پیرو [7]، استفاده از این روش برای مدل‌سازی متاتکنولوژی کاب-داگلاس بدون هیچ‌گونه ابهامی است. بنابراین، در این بخش از این روش استفاده می‌شود. ابتدا نمادها و اصول مورد نیاز را معرفی و با استفاده از آنها متاتکنولوژی کاب-داگلاس را تعریف می‌کنیم. سپس، نمایش جبری معادل این متاتکنولوژی را ارائه می‌کنیم.

مجموعه مشاهدات $\mathcal{N}$ را به G زیرگروه ناتهی و مجزای $\mathcal{N}_g$، $g \in \mathcal{G} = \{1, \dots, G\}$، تجزیه می‌کنیم، بطوریکه مشاهدات در هر زیرگروه در محیط مشابهی با تجانس کافی فعالیت می‌کنند. به عبارت دیگر، مشاهدات در یک زیرگروه در یک (زیر)تکنولوژی گروهی فعالیت می‌کنند که ممکن است با تکنولوژی‌های متناظر سایر زیرگروه‌ها متفاوت باشد. در ادامه، فرض می‌کنیم که حداقل دو یا بیشتر زیرگروه وجود دارد ($G > 1$)، مگر اینکه خلاف آن به صراحت بیان شود.

برای هر $g \in \mathcal{G}$، مجموعه اندیس‌های مشاهدات در زیرگروه $\mathcal{N}_g$ را با $\mathcal{J}_g$ نشان می‌دهیم و تکنولوژی گروهی القا شده توسط $\mathcal{N}_g$ را با $\mathcal{T}_g$ نشان می‌دهیم. متاتکنولوژی متناظر تکنولوژی‌های گروهی $\mathcal{T}_g$، $g \in \mathcal{G}$، را نیز با $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از نمادهای معرفی شده، متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ به‌صورت زیر تعبیر می‌شود:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{G}} = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \;\middle|\; \text{می‌تواند } \boldsymbol{y} \text{ را تولید کند } \boldsymbol{x} \right\}. \tag{۸}$$

تعبیر متاتکنولوژی به‌صورت (۸) برای اولین بار توسط مهدیلو و همکاران [7] معرفی شده است و متفاوت با تعریف اولیه متاتکنولوژی به‌صورت اجتماع تکنولوژی‌های گروهی‌اش است. علت و اهمیت معرفی تعبیر (۸) این است که کاملاً منطبق بر تعبیر کلی (۱) از تکنولوژی تولید است و هیچ ارتباط از پیش تعیین شده بین متاتکنولوژی و تکنولوژی‌های گروهی آن اعمال نمی‌کند. بر مبنای تعبیر (۸)، برای توصیف ویژگی‌های متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ با تکنولوژی‌های گروهی $\mathcal{T}_{g}$، $g \in \mathcal{G}$، اصول زیر را معرفی می‌کنیم.

اصل ۱ (*شمول تکنولوژی‌های گروهی*) متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ شامل همه تکنولوژی‌های گروهی‌اش است. یعنی، به ازای هر $g \in \mathcal{G}$، داریم $\mathcal{T}_{g} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$.

اصل ۲ (*شمول گروهی مشاهدات*) به ازای هر $g \in \mathcal{G}$، مشاهدات زیرگروه g-ام در تکنولوژی گروهی $\mathcal{T}_{g}$ قرار دارند. یعنی، $\mathcal{N}_g \subset \mathcal{T}_g$.

اصل ۳ (*امکان‌پذیری قوی درون‌گروهی*) به ازای هر $g \in \mathcal{G}$، اگر $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_g$، آنگاه $(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{y}}) \in \mathcal{T}_g$ برای هر $\widetilde{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}$ و هر $\boldsymbol{0} \leq \widetilde{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$.

اصل ۴ (*تحدب لگاریتمی درون‌گروهی*) به ازای هر $g \in \mathcal{G}$، تکنولوژی گروهی مثبت $\left(\mathcal{T}_g\right)_{++}$ لگاریتمی محدب است. یعنی، به ازای هر $(\widehat{\boldsymbol{x}},\widehat{\boldsymbol{y}}),(\widetilde{\boldsymbol{x}},\widetilde{\boldsymbol{y}}) \in \left(\mathcal{T}_g\right)_{++}$ و هر $\alpha \in (0,1)$، داریم:

$$\left(\widehat{\boldsymbol{x}}^{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1-\alpha)},\widehat{\boldsymbol{y}}^{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1-\alpha)}\right) \in \left(\mathcal{T}_g\right)_{++}.$$

اصل ۱ بوضوح تضمین می‌کند که متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ شامل اجتماع همه تکنولوژی‌های گروهی آن، یعنی $\bigcup_{g\in\mathcal{G}}\mathcal{T}_g$، است. بنا بر اصل ۲، لازم است که مشاهدات هر یک از زیرگروه‌ها در تکنولوژی گروهی متناظر آن زیرگروه واقع شوند. اصل ۳ نیز بیان می‌کند که هر واحد تصمیم‌گیرنده حاصل از افزایش ورودی‌ها و کاهش خروجی‌های یک واحد تصمیم‌گیرنده شدنی در یک تکنولوژی گروهی (با حفظ نامنفی بودن بردارهای ورودی و خروجی) در آن تکنولوژی گروهی جای می‌گیرد. برای جزئیات بیشتر درباره اصول ۱، ۲ و ۳، به [7] مراجعه شود.

اصل ۴ یک اصل تولید جدید است که در این مقاله معرفی می‌شود. این اصل تضمین می‌کند که هر یک از تکنولوژی‌های گروهی متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ لگاریتمی‌محدب است و جایگزین اصل تحدب درون‌گروهی معرفی شده در [7] محسوب می‌شود. لازم به ذکر است که اصل ۴ علیرغم تضمین تحدب لگاریتمی تکنولوژی‌های گروهی، تحدب لگاریتمی خود متاتکنولوژی را ایجاب نمی‌کند. این نکته در مثال ۳-۱ تشریح خواهد شد.

برای هر $g \in \mathcal{G}$، از نماد $\mathcal{T}_{g} \sqsubseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ استفاده می‌کنیم تا بیان کنیم که $\mathcal{T}_{g}$ تکنولوژی گروهی g-ام متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ است. همچنین، فرض می‌کنیم $\mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ مجموعه همه متاتکنولوژی‌های $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ است که در اصول ۱-۴ صدق می‌کنند. با استفاده از این نمادگذاری‌ها، تعریف زیر را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۳-۱ متاتکنولوژی کاب-داگلاس $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ و تکنولوژی‌های گروهی آن، یعنی $\mathcal{T}_{g}^{\mathrm{CD}}$، $g \in \mathcal{G}$، بترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} := \bigcap_{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}\in\mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}} \mathcal{T}_{\mathcal{G}}, \tag{۹}$$

$$\mathcal{T}_{g}^{\mathrm{CD}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{T}_g\sqsubseteq\mathcal{T}_{\mathcal{G}},\\ \mathcal{T}_{\mathcal{G}}\in\mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}}} \mathcal{T}_{g}, \quad g \in \mathcal{G}. \tag{۱۰}$$

توجه شود که تعریف ۳-۱ را می‌توان به عنوان تعمیم تعریف ۲-۲ در نظر گرفت. بطور دقیقتر، اگر $G = 1$، آنگاه متاتکنولوژی کاب-داگلاس در واقع همان تنها تکنولوژی گروهی‌اش خواهد بود و اصل ۱ بوضوح برقرار خواهد بود. همچنین، اصول ۲، ۳ و ۴ بترتیب تبدیل به اصول الف، ب و پ خواهند شد. در نتیجه، تعریف ۳-۱ تبدیل به تعریف ۲-۲ می‌شود.

بنا بر تعریف ۳-۱، هیچ رابطه از پیش تعیین‌شده‌ای بین متاتکنولوژی کاب-داگلاس و تکنولوژی‌های گروهی آن اعمال نشده است. به عنوان یک رابطه ساختاری، در قضیه بعد نشان می‌دهیم که متاتکنولوژی کاب داگلاس برابر با اجتماع تکنولوژی‌های گروهی‌اش است و لذا در اصل *تولید توسط تکنولوژی‌های گروهی* معرفی شده در [7] صدق می‌کند.

قضیه ۳-۱ تساوی زیر برقرار است:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \mathcal{T}_g^{\mathrm{CD}}. \tag{۱۱}$$

برهان. فرض کنید $\mathcal{U}$ نشان‌دهنده مجموعه سمت راست تساوی (۱۱) باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} = \mathcal{U}$. مجموعه $\mathcal{U}$ را به عنوان یک متاتکنولوژی در نظر بگیرید بطوریکه $\mathcal{T}_g^{\mathrm{CD}}$ تکنولوژی گروهی g-ام آن است. مشابه لم A.1 در [7]، می‌توان نشان داد که $\mathcal{T}_g^{\mathrm{CD}}$ برای هر $g \in \mathcal{G}$ در اصول الف-پ صدق می‌کند. در نتیجه، مجموعه $\mathcal{U}$ در همه اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند و لذا $\mathcal{U} \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. بنابراین، از تعریف (۹) نتیجه می‌شود که $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} \subseteq \mathcal{U}$.
برعکس، فرض کنید $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{U}$. بنا بر تعریف، یک $g' \in \mathcal{G}$ وجود دارد بطوریکه $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{g'}^{\mathrm{CD}}$. برای هر $\mathcal{T}^{\mathcal{G}} \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$، از تعریف تکنولوژی گروهی کاب-داگلاس در (۱۰) نتیجه می‌شود $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{g'} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$، بطوریکه $\mathcal{T}_{g'} \sqsubseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$. بنابراین، از تعریف متاتکنولوژی کاب-داگلاس در (۹) نتیجه می‌شود $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. پس، $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. در نتیجه، $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} = \mathcal{U}$، و لذا تساوی (۱۱) ثابت می‌شود.

قضیه ۳-۱ نشان می‌دهد که روش اصل موضوعی بکار گرفته شده در این مقاله برای مدل‌سازی متاتکنولوژی معادل با همان تعریف اولیه متاتکنولوژی به‌صورت اجتماع تکنولوژی‌های گروهی‌اش است.

از برهان قضیه ۳-۱، نتیجه می‌شود که متاتکنولوژی کاب-داگلاس $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ در اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند که ایجاب می‌کند $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. بنابراین، نتیجه زیر از تعاریف ۲-۱ و ۳-۱ حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۱ متاتکنولوژی کاب-داگلاس $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ در اصل برونیابی حداقل بر حسب اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند.

حال، برای هر $g \in \mathcal{G}$، تکنولوژی کاب-داگلاس گروهی تولید شده توسط مشاهدات $\mathcal{N}_g$ را با $\mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}$ نشان می‌دهیم. بنا بر قضیه ۲-۱، توصیف جبری این تکنولوژی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s \mid & \prod_{j\in\mathcal{J}_g} \boldsymbol{x}_j^{\mu_j} \le \boldsymbol{x} \\ & \prod_{j\in\mathcal{J}_g} \boldsymbol{y}_j^{\mu_j} \ge \boldsymbol{y}, \\ & \sum_{j\in\mathcal{J}_g} \mu_j = 1, \boldsymbol{\mu} \ge \boldsymbol{0}\}.\end{aligned} \tag{۱۲}$$

در قضیه بعد، نشان می‌دهیم که برای هر $g \in \mathcal{G}$، تکنولوژی گروهی g-ام متاتکنولوژی کاب-داگلاس برابر با تکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده توسط مشاهدات زیرگروه g-ام است و در نتیجه متاتکنولوژی کاب-داگلاس برابر با اجتماع G تکنولوژی کاب-داگلاس گروهی است.

قضیه ۳-۲ احکام زیر برقرارند:

$$\mathcal{T}_g^{\mathrm{CD}} = \mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۱۳}$$

$$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}. \tag{۱۴}$$

برهان. برای اثبات (۱۳)، اندیس دلخواه $g' \in \mathcal{G}$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که $\mathcal{T}_{g'}^{\mathrm{CD}}$ در اصول الف تا پ صدق می‌کند. چون $\mathcal{T}_{g',\min}^{\mathrm{CD}}$ کوچکترین تکنولوژی است که در اصول مذکور صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که $\mathcal{T}_{g',\min}^{\mathrm{CD}} \subseteq \mathcal{T}_{g'}^{\mathrm{CD}}$. برعکس، مجموعه $\bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}$ را به عنوان یک متاتکنولوژی با تکنولوژی‌های گروهی $\mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}$، $g \in \mathcal{G}$، در نظر بگیرید. در این صورت، این متاتکنولوژی در اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند که از آن نتیجه می‌شود $\bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}} \in \mathbb{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. بنابراین، از تعریف تکنولوژی گروهی کاب-داگلاس g'-ام در (۱۰)، داریم $\mathcal{T}_{g'}^{\mathrm{CD}} \subseteq \mathcal{T}_{g',\min}^{\mathrm{CD}}$ که نتیجه می‌دهد $\mathcal{T}_{g'}^{\mathrm{CD}} = \mathcal{T}_{g',\min}^{\mathrm{CD}}$. با توجه به (۱۳)، تساوی (۱۴) از تساوی (۱۱) نتیجه می‌شود. بنابراین، اثبات کامل است.

با استفاده از قضیه ۳-۲، قضیه بعد توصیف جبری متاتکنولوژی کاب-داگلاس را ارائه می‌دهد.

قضیه ۳-۳ متاتکنولوژی کاب-داگلاس $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ برابر است با مجموعه همه $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\prod_{j \in \mathcal{J}_g} \boldsymbol{x}_j^{\lambda_j} \leq \boldsymbol{x}^{\gamma_g}, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۱۵}$$

$$\prod_{j \in \mathcal{J}_g} \boldsymbol{y}_j^{\lambda_j} \geq \boldsymbol{y}^{\gamma_g}, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۱۶}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_g} \lambda_j = \gamma_g, \tag{۱۷}$$

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \gamma_g = 1, \tag{۱۸}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma} \in \{0,1\}^G. \tag{۱۹}$$

برهان. فرض کنید $\mathcal{W}$ مجموعه همه $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s$ باشد که در شرایط (۱۵) تا (۱۹) صدق می‌کنند. می‌خواهیم ثابت کنیم $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} = \mathcal{W}$.

فرض کنید $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. بنا بر تساوی (۱۴)، یک $g' \in \mathcal{G}$ وجود دارد بطوریکه $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{g',\min}^{\mathrm{CD}}$. بنابراین، یک بردار $\boldsymbol{\mu}$ وجود دارد بطوریکه $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ با این بردار در شرایط (۱۲) صدق می‌کند. تعریف کنید $\gamma_{g'} = 1$ و $\gamma_g = 0$ برای $g \neq g'$، $g \in \mathcal{G}$؛ همچنین، تعریف کنید $\lambda_j = \mu_j$ برای $j \in \mathcal{J}_{\mathrm{g}}$، و $\lambda_j = 0$ برای $j \in \mathcal{J} \backslash \mathcal{J}_{g'}$.

در این صورت، $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ با بردارهای تعریف شده $\boldsymbol{\lambda}$ و $\boldsymbol{\gamma}$ در شرایط (۱۵) تا (۱۹) صدق می‌کند و لذا $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{W}$. پس، $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} \subseteq \mathcal{W}$.

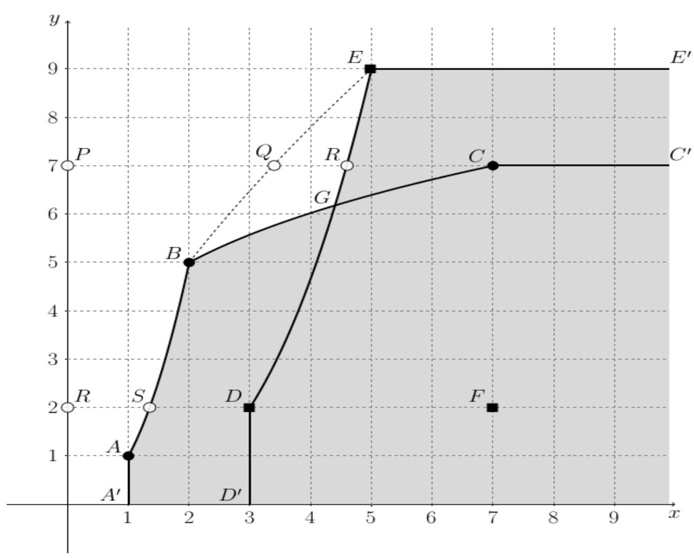
برعکس، فرض کنید $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{W}$. در این صورت، بردارهای $\boldsymbol{\lambda}$ و $\boldsymbol{\gamma}$ وجود دارند بطوریکه $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ با این بردارها در شرایط (۱۵) تا (۱۹) صدق می‌کند. چون مجموع متغیرهای دودویی γ_g، $g \in \mathcal{G}$، برابر با یک است، دقیقاً یک $g' \in \mathcal{G}$ وجود دارد بطوریکه $\gamma_{g'} = 1$، و $\gamma_g = 0$ برای همه $g \neq g'$، $g \in \mathcal{G}$. تعریف کنید $\mu_j = \lambda_j$ برای $j \in \mathcal{J}_{g'}$. در این صورت، $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ با بردار $\boldsymbol{\mu}$ در (۱۲) صدق می‌کند و لذا $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{g',\min}^{\mathrm{CD}}$. با استفاده از (۱۴)، نتیجه می‌شود $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. بنابراین، داریم $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$. در نتیجه، $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} = \mathcal{W}$.

برای تبیین بهتر ساختار متاتکنولوژی و تکنولوژی‌های گروهی، نتایج ارائه‌شده در این بخش با یک مثال عددی تشریح می‌گردد.

مثال ۳-۱ شش واحد تصمیم‌گیرنده A، B، C، D، E و F تعریف شده در جدول ۱ را در نظر می‌گیریم، بطوریکه هر یک از آنها تنها خروجی y را با استفاده از تنها ورودی x تولید می‌کند. فرض می‌کنیم که سه واحد تصمیم‌گیرنده A، B و C فعالیت مشابه در گروه اول، و سه واحد تصمیم‌گیرنده D، E و F فعالیت مشابه در گروه دوم دارند.

جدول ۱ (شش واحد تصمیم‌گیرنده مشاهده شده در مثال ۳-۱)

گروه	**اول**			**دوم**		
واحد تصمیم‌گیرنده	A	B	C	D	E	F
ورودی (x)	۱	۲	۷	۳	۵	۷
خروجی (y)	۱	۵	۷	۲	۹	۲



شکل ۱ (متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده توسط مشاهدات A تا E)

نواحی رنگی پایین و سمت راست منحنی‌های $A'ABCC'$ و $D'DEE'$ در شکل ۱ بترتیب نشان‌دهنده تکنولوژی‌های کاب-داگلاس گروهی $\mathcal{T}_{1,\min}^{\mathrm{CD}}$ و $\mathcal{T}_{2,\min}^{\mathrm{CD}}$ تولید شده توسط مشاهدات گروه‌های اول و دوم هستند. توجه می‌کنیم که هر یک از این تکنولوژی‌ها لگاریتمی محدب هستند. همچنین، مرز هر یک از آنها بر خلاف تکنولوژی استاندارد بازده-به-مقیاس متغیر قطعه-قطعه خطی نیست. به عنوان مثال، قطعه AB یک منحنی مقعر (تقعر رو به بالا) است. بنا بر قضیه ۳-۲، متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده توسط مشاهدات A تا E با گروه‌بندی مفروض آنها برابر است با اجتماع دو تکنولوژی کاب-داگلاس گروهی. بنابراین، متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده برابر با ناحیه رنگی محدود شده با منحنی $A'ABGEE'$ است.

برای تشریح تذکر ۳-۱، منحنی خط‌چین BE را در نظر می‌گیریم که مجموعه همه ترکیبات محدب لگاریتمی نقاط B و E را نشان می‌دهد. همانطور که می‌بینیم، نقاط این منحنی به جز نقاط ابتدا و انتهای آن متعلق به متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده نیستند و لذا، این متاتکنولوژی لگاریتمی محدب نیست. بنابراین، اگرچه هر دو تکنولوژی گروهی متاتکنولوژی کاب-داگلاس لگاریتمی محدب هستند، خود متاتکنولوژی که حاصل اجتماع آنها است لگاریتمی محدب نیست.

در پایان، توجه شود که ناحیه پایین و سمت راست منحنی $A'ABQEE'$ در شکل ۳-۱ تکنولوژی کاب-داگلاس استاندارد تولید شده با همه مشاهدات داده شده را نشان می‌دهد. بنابراین، متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده یک زیرمجموعه تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس تولید شده است، ولی برابر با آن نیست.

۴- اندازه‌گیری متاکارایی کاب-داگلاس

همانطور که در مثال ۳-۱ تشریح شد، تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس و متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده توسط مجموعه مشاهدات ممکن است باهم برابر نباشد. در حالت کلی، می‌توان ثابت کرد که رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathrm{CD}}. \tag{۲۰}$$

فرض کنید $\theta_o^{\mathcal{G}}$ نشان‌دهنده کارایی شعاعی ورودی واحد تصمیم‌گیرنده $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ نسبت به متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ باشد. به عبارت دیگر، $\theta_o^{\mathcal{G}}$ مقدار بهینه مسئله بهینه‌سازی حاصل از مسئله بهینه‌سازی (۲۰) با جایگزینی $\mathcal{T}$ با $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ است. یعنی،

$$\begin{aligned} \theta_o^{\mathcal{G}} = \min\ & \theta \\ & \text{subject to} \\ & (\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}} \\ & \theta \text{ sign free.} \end{aligned} \tag{۲۱}$$

از آنجا که بزرگتر شدن ناحیه شدنی یک مسئله بهینه‌سازی منجر به بدتر شدن مقدار بهینه نمی‌شود، از رابطه (۲۰) نتیجه می‌شود که نامساوی زیر بین مقادیر بهینه مسائل بهینه‌سازی(۴) و (۲۱) برقرار است:

$$\theta_o \leq \theta_o^{\mathcal{G}}. \tag{۲۲}$$

بنا بر نامساوی (۲۲)، ممکن است متاکارایی واحد تحت ارزیابی با استفاده نادرست از تکنولوژی استاندارد کاب-داگلاس تولید شده توسط همه واحدهای تصمیم گیرنده (یعنی، بدون توجه به گروه‌بندی آنها در مدل‌سازی) به جای متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده توسط آنها تحت تأثیر قرار گیرد و لذا نتایج ارزیابی دقیق نباشد. به عنوان مثال، واحد مشاهده شده C در مثال ۳-۱ را به عنوان واحد تحت ارزیابی در نظر می‌گیریم. در این صورت،

کارایی ورودی این واحد در تکنولوژی کاب-داگلاس و متاکارایی ورودی آن در متاتکنولوژی کاب-داگلاس تولید شده توسط مجموعه مشاهدات A تا E بترتیب برابر با $\theta_o = \frac{PQ}{PC}$ و $\theta_o^{\mathcal{G}} = \frac{PR}{PC}$ هستند. این نشان می‌دهد که نامساوی (۲۲) ممکن است به‌صورت اکید نیز برقرار باشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که نادیده گرفتن فعالیت گروهی واحدهای تصمیم‌گیرنده در مدل‌سازی متاتکنولوژی کاب-داگلاس ممکن است منجر به بزرگتر شدن مجموعه تکنولوژی و در نتیجه کوچکتر شدن اندازه متاکارایی شود.

در این بخش، دو روش برای محاسبه اندازه متاکارایی شعاعی ورودی در متاتکنولوژی کاب-داگلاس ارائه می‌کنیم. بر خلاف روش اول که چند مرحله‌ای است و نیاز به حل G مسئله بهینه‌سازی خطی دارد، روش دوم تک‌مرحله‌ای است و با حل تنها یک مسئله بهینه‌سازی خطی اجرا می‌شود.

روش اول برای محاسبه $\theta_o^{\mathcal{G}}$ مبتنی بر توصیف ساختاری متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ در (۱۴) است، که نشان می‌دهد متاتکنولوژی کاب-داگلاس برابر با اجتماع تکنولوژی‌های کاب-داگلاس گروهی‌اش است. بنا بر تعریف، $\theta_o^{\mathcal{G}}$ مقدار بهینه مسئله بهینه‌سازی (۲۱) است. به ازای هر $g \in \mathcal{G}$، فرض می‌کنیم θ_o^{g} مقدار بهینه مسئله بهینه‌سازی حاصل از جایگزینی $\mathcal{T}^{\mathrm{CD}}$ با $\mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}$ در مسئله بهینه‌سازی (۴) (با فرض شدنی بودن مسئله) است.

با توجه به تساوی (۱۴)، مجموعه $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ در مسئله بهینه‌سازی (۲۱) را با $\bigcup_{g\in\mathcal{G}} \mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت، نتیجه می‌شود مقدار بهینه $\theta_o^{\mathcal{G}}$ برابر با مینیمم مقادیر بهینه θ_o^{g}، $g \in \mathcal{G}$، است. بنابراین، تساوی زیر برقرار است:

$$\theta_o^{\mathcal{G}} = \min_{g\in\mathcal{G}}\{\theta_o^{g}\}. \qquad (۲۳)$$

رابطه (۲۳) بیان می‌کند که متاکارایی شعاعی ورودی واحد $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ در متاتکنولوژی کاب-داگلاس $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ برابر است با مینیمم مقدار (ابر)کارایی‌های شعاعی ورودی این واحد نسبت به تکنولوژی‌های کاب-داگلاس گروهی $\mathcal{T}_{g,\min}^{\mathrm{CD}}$، $g \in \mathcal{G}$.

با توجه به توضیحات بخش ۲-۳، هر یک از مقادیر بهینه θ_o^{g}، $g \in \mathcal{G}$ ، را می‌توان با حل یک مسئله بهینه‌سازی خطی بدست آورد. بنابراین، محاسبه اندازه متاکارایی $\theta_o^{\mathcal{G}}$ با استفاده از رابطه (۲۳) نیازمند حل G مسئله بهینه‌سازی خطی است.

روش دوم برای محاسبه $\theta_o^{\mathcal{G}}$ مبتنی بر توصیف جبری متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\mathrm{CD}}$ در قضیه ۳-۳ است. با استفاده از توصیف مذکور، مسئله بهینه‌سازی (۲۱) را به صورت معادل زیر بیان می‌کنیم:

$$\theta_o^{\mathcal{G}} = \min\ \theta \qquad (۲۴)$$

$$\text{subject to}$$

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_g} \boldsymbol{x}_j^{\lambda_j} \le \theta^{\gamma_g} \boldsymbol{x}_o^{\gamma_g}, \quad g \in \mathcal{G}, \qquad (۲۵)$$

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_g} \boldsymbol{y}_j^{\lambda_j} \ge \boldsymbol{y}_o^{\gamma_g}, \qquad g \in \mathcal{G}, \qquad (۲۶)$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_g} \lambda_j = \gamma_g, \quad g \in \mathcal{G}, \qquad (۲۷)$$

$$\sum_{g\in\mathcal{G}}\gamma_g = 1, \quad (۲۸)$$

$$\theta \text{ sign free}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (۲۹)$$

$$\boldsymbol{\gamma} \in \{0,1\}^G. \quad (۳۰)$$

بنا بر فرض، داریم $(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}^{\text{CD}}$. بنابراین، به راحتی می‌توان بررسی کرد که مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مختلط تعریف شده در (۲۴) تا (۳۰) (با متغیرهای پیوسته θ و $\boldsymbol{\lambda}$، و دودویی $\boldsymbol{\gamma}$) همواره دارای جواب شدنی است. در قضیه ۴-۱، ثابت می‌کنیم که متغیرهای دودویی این مسئله بهینه‌سازی را می‌توان به فرم معادل زیر پیوسته کرد:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_o^{\mathcal{G}} = \min\ & \theta \\ & \text{subject to} \\ & (25) - (29) \\ & \boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (۳۱)$$

قضیه ۴-۱ تساوی زیر برقرار است:

$$\theta_o^{\mathcal{G}} = \bar{\theta}_o^{\mathcal{G}}. \quad (۳۲)$$

برهان. برای اختصار در نوشتار، مسئله تعریف شده در (۲۴) تا (۳۰) را مسئله (#) می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم مقادیر بهینه مسائل (#) و (۳۱) باهم برابرند.

چون ناحیه شدنی مسئله (#) زیرمجموعه ناحیه شدنی مسئله (۳۱) است، نتیجه می‌شود $\theta_o^{\mathcal{G}} \geq \bar{\theta}_o^{\mathcal{G}}$. برای اثبات عکس نامساوی، فرض کنید θ^*، $\boldsymbol{\lambda}^*$ و $\boldsymbol{\gamma}^*$ جواب بهینه مسئله (۳۱) باشد. چون این جواب در محدودیت (۲۸) صدق می‌کند، داریم $\boldsymbol{\gamma}^* \leq \mathbf{1}$. همچنین، یک $g' \in \mathcal{G}$ وجود دارد بطوریکه $\gamma_{g'}^* > 0$. برای این g'، محدودیت‌های (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) را بترتیب به صورت معادل زیر بیان می‌کنیم:

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_g}\boldsymbol{x}_j^{\lambda_j^*/\gamma_{g'}^*} \leq \theta^*\boldsymbol{x}_o, \quad g\in\mathcal{G}, \quad (۳۳)$$

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_g}\boldsymbol{y}_j^{\lambda_j^*/\gamma_{g'}^*} \geq \boldsymbol{y}_o, \quad g\in\mathcal{G}, \quad (۳۴)$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_g}\lambda_j^*/\gamma_{g'}^* = 1. \quad (۳۵)$$

تعریف می‌کنیم $\hat{\theta} = \theta^*$، $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{g'} = \frac{1}{\gamma_{g'}^*}\boldsymbol{\lambda}^*$، $\hat{\gamma}_{g'} = 1$، $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_g = \mathbf{0}$ و $\hat{\gamma}_g = 0$ برای $g \neq g'$، $g \in \mathcal{G}$. در این صورت، از (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) نتیجه می‌شود که $\hat{\theta}$، $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ و $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ یک جواب شدنی برای مسئله (#) است. بنابراین، $\theta_o^{\mathcal{G}} \leq \bar{\theta}_o^{\mathcal{G}}$. در نتیجه، تساوی (۳۲) ثابت می‌شود.

قضیه ۴-۱ نشان می‌دهد که متاکارایی $\theta_o^{\mathcal{G}}$ را می‌توان با حل مسئله بهینه‌سازی غیرخطی (۳۱) محاسبه کرد. می‌دانیم مسائل بهینه‌سازی غیرخطی در مقایسه با مسائل بهینه‌سازی خطی از پیچیدگی محاسباتی بیشتری برخوردار بوده و حل آن‌ها دشوارتر است. بنابراین، با استفاده از تغییر متغیرهای مناسبی در دو مرحله، مسئله بهینه‌سازی غیرخطی (۳۱) را به یک مسئله بهینه‌سازی خطی معادل تبدیل می‌کنیم. در مرحله اول، از تغییر متغیرهای $\theta_g := \theta^{\gamma_g}$، $g \in \mathcal{G}$، استفاده کرده و مسئله بهینه‌سازی (۳۱) را به مسئله بهینه‌سازی غیرخطی معادل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\tilde{\theta}_o^{\mathcal{G}} = \min \prod_{g\in\mathcal{G}} \theta_g \tag{۳۶}$$

subject to

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_g} \boldsymbol{x}_j^{\lambda_j} \le \theta_g \boldsymbol{x}_o^{\gamma_g}, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۳۷}$$

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_g} \boldsymbol{y}_j^{\lambda_j} \ge \boldsymbol{y}_o^{\gamma_g}, \qquad g \in \mathcal{G}, \tag{۳۸}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_g} \lambda_j = \gamma_g, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۳۹}$$

$$\sum_{g\in\mathcal{G}} \gamma_g = 1, \tag{۴۰}$$

$$\boldsymbol{1} \ge \boldsymbol{\theta} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma} \ge \boldsymbol{0}. \tag{۴۱}$$

معادل بودن مسئله بهینه‌سازی بالا با مسئله بهینه‌سازی (۳۱) را در قضیه بعد ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴-۲ تساوی زیر برقرار است:

$$\bar{\theta}_o^{\mathcal{G}} = \tilde{\theta}_o^{\mathcal{G}}. \tag{۴۲}$$

برهان. برای اختصار در نوشتار، مسئله تعریف شده در (۳۶) تا (۴۱) را مسئله (##) می‌نامیم. بایستی ثابت کنیم مقادیر بهینه مسائل (۳۱) و (##) باهم برابرند.

فرض کنید θ^*، $\boldsymbol{\lambda}^*$ و $\boldsymbol{\gamma}^*$ جواب بهینه مسئله (۳۱) باشد. تعریف می‌کنیم $\boldsymbol{\theta}' = \theta^*\boldsymbol{1}$، $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}^*$ و $\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\gamma}^*$. براحتی می‌توان بررسی کرد که $\boldsymbol{\theta}'$، $\boldsymbol{\lambda}'$ و $\boldsymbol{\gamma}'$ جواب شدنی مسئله (##) است. چون $\sum_{g\in\mathcal{G}} \gamma_g^* = 1$، مقدار تابع هدف برای این جواب شدنی برابر است با θ^*. در نتیجه، $\bar{\theta}_o^{\mathcal{G}} \ge \tilde{\theta}_o^{\mathcal{G}}$.

برعکس، فرض کنید θ^{**}، $\boldsymbol{\lambda}^{**}$ و $\boldsymbol{\gamma}^{**}$ جواب بهینه مسئله (##) باشد. چون این جواب در محدودیت (۴۰) صدق می‌کند، یک اندیس $g' \in \mathcal{G}$ وجود دارد بطوریکه $\gamma_{g'}^{**} > 0$. برای چنین اندیسی، محدودیت‌های (۳۷)، (۳۸) و (۳۹) را بترتیب به صورت معادل زیر بیان می‌کنیم:

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_{g'}} \boldsymbol{x}_j^{\lambda_j^{**}/\gamma_{g'}^{**}} \le \left(\theta_{g'}^{**}\right)^{1/\gamma_{g'}^{**}} \boldsymbol{x}_o, \tag{۴۳}$$

$$\prod_{j\in\mathcal{J}_{g'}} \boldsymbol{y}_j^{\lambda_j^{**}/\gamma_{g'}^{**}} \ge \boldsymbol{y}_o, \tag{۴۴}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_{g'}} \lambda_j^{**}/\gamma_{g'}^{**} = 1. \tag{۴۵}$$

می‌توان نشان داد که $\hat{\theta} = \left(\theta_{g'}^{**}\right)^{1/\gamma_{g'}^{**}}$، $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{g'} = \frac{1}{\gamma_{g'}^{**}}\boldsymbol{\lambda}^{**}$، $\hat{\gamma}_{g'} = 1$، $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_g = \boldsymbol{0}$ و $\hat{\gamma}_g = 0$ برای همه $g \neq g'$، $g \in \mathcal{G}$، یک جواب شدنی برای مسئله (۳۱) است. مقدار تابع هدف برای این جواب شدنی برابر است با $\left(\theta_{g'}^{**}\right)^{1/\gamma_{g'}^{**}}$.
بنابراین،

$\bar{\theta}_o^{\mathcal{G}} \le \left(\theta_{g'}^{**}\right)^{1/\gamma_{g'}^{**}}$، و یا بطور معادل $\left(\bar{\theta}_o^{\mathcal{G}}\right)^{\gamma_{g'}^{**}} \le \theta_{g'}^{**}$. چون $\sum_{g\in\mathcal{G}} \gamma_g^{**} = 1$، ضرب طرفین راست و چپ این

نامساوی‌ها بطور متناظر در هم نتیجه می‌دهد $\bar{\theta}_o^{\mathcal{G}} \leq \tilde{\theta}_o^{\mathcal{G}}$. بنابراین، تساوی (۴۲) ثابت می‌شود.
از قضایای ۴-۱ و ۴-۲، تساوی زیر بدست می‌آید:

$$\theta_o^{\mathcal{G}} = \tilde{\theta}_o^{\mathcal{G}}. \tag{۴۶}$$

تساوی (۴۶) نشان می‌دهد که اندازه متاکارایی $\theta_o^{\mathcal{G}}$ را می‌توان از حل مسئله بهینه‌سازی غیرخطی تعریف شده در (۳۶) تا (۴۱) بدست آورد. با انجام تغییر متغیرهای $\varphi_g := -\ln \theta_g$، $g \in \mathcal{G}$، مسئله بهینه‌سازی مذکور را به مسئله بهینه‌سازی خطی معادل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\varphi_o^{\mathcal{G}} = \max \sum_{g \in G} \varphi_g \tag{۴۷}$$

$$\text{subject to}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j \ln(\boldsymbol{x}_j) \leq \gamma_g \ln(\boldsymbol{x}_o) - \varphi_g, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۴۸}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j \ln(\boldsymbol{y}_j) \geq \gamma_g \ln(\boldsymbol{y}_o), \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۴۹}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_g} \lambda_j = \gamma_g, \quad g \in \mathcal{G}, \tag{۵۰}$$

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \gamma_g = 1, \tag{۵۱}$$

$$\boldsymbol{\varphi} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\gamma} \geq \boldsymbol{0}. \tag{۵۲}$$

اگر $\boldsymbol{\varphi}^*$، $\boldsymbol{\gamma}^*$ و $\boldsymbol{\lambda}^*$ جواب بهینه مسئله بالا باشد، آنگاه $\theta_g' = \exp(-\varphi_g^*)$، $g \in \mathcal{G}$، $\boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\gamma}^*$ و $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}^*$ جواب بهینه مسئله تعریف شده در (۳۶) تا (۴۱) خواهد بود، و مقدار بهینه متناظر برابر است با $\tilde{\theta}_o^{\mathcal{G}} = \exp\left(-\sum_{g \in \mathcal{G}} \varphi_g^*\right)$. در نتیجه، تساوی زیر از رابطه (۴۶) حاصل می‌شود:

$$\theta_o^{\mathcal{G}} = \exp\left(-\varphi_o^{\mathcal{G}}\right). \tag{۵۳}$$

این رابطه نشان می‌دهد که متاکارایی کاب-داگلاس $\theta_o^{\mathcal{G}}$ را می‌توان با حل مسئله بهینه‌سازی خطی تعریف شده در (۴۷) تا (۵۲) بدست آورد. این مطلب نشان می‌دهد که روش دوم در مقایسه با روش اول که نیازمند حل G مسئله بهینه‌سازی خطی است، از کارایی محاسباتی بالاتری برخوردار است. چون حل مسائل بهینه‌سازی خطی با استفاده از نرم‌افزارهای رایج بهینه‌سازی براحتی قابل اجرا است، استفاده از روش‌های پیشنهادی ما برای محاسبه متاکارایی کاب-داگلاس از دید عملی کارا و به سادگی قابل اجرا است.

۸- مثال عددی

در این بخش، دو روش ارائه شده در بخش قبل را برای ارزیابی متاکارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال ۳-۱ اجرا می‌کنیم و نتایج حاصل را تشریح می‌کنیم.
برای اجرای روش اول، ابتدا اندازه‌های کارایی شعاعی ورودی واحدهای تصمیم‌گیرنده را بترتیب در تکنولوژی‌های کاب-داگلاس گروهی $\mathcal{T}_{1,\min}^{\mathrm{CD}}$ و $\mathcal{T}_{2,\min}^{\mathrm{CD}}$ تولید شده توسط مشاهدات گروه‌های اول و دوم اندازه‌گیری می‌کنیم. نتایج بدست آمده بترتیب در سطرهای سوم و چهارم جدول ۲ آمده است. همانطور که می‌بینیم، واحدهای تصمیم‌گیرنده A، B و C در تکنولوژی اول کارا هستند. همچنین، واحدهای تصمیم‌گیرنده D و E در تکنولوژی دوم کارا هستند.

جدول ۲ (کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال ۳-۱)

گروه	اول			دوم		
واحد تصمیم‌گیرنده	A	B	C	D	E	F
کارایی θ_o^1 در تکنولوژی $\mathcal{T}_{1,\min}^{\text{CD}}$	۱	۱	۱	۰٫۴۴۹۳	–	۰٫۱۹۲۶
(اَبَر)کارایی θ_o^2 در تکنولوژی $\mathcal{T}_{2,\min}^{\text{CD}}$	۳	۲٫۰۴۷۶	۰٫۶۵۵۸	۱	۱	۰٫۴۲۸۶
کارایی $\theta_o^{\{1,2\}}$ در متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\{1,2\}}^{\text{CD}}$	۱	۱	۰٫۶۵۵۸	۰٫۴۴۹۳	۱	۰٫۱۹۲۶

جدول ۳ (ورودی بهینه واحدهای تصمیم‌گیرنده مثال ۳-۱)

گروه	اول			دوم		
واحد تصمیم‌گیرنده	A	B	C	D	E	F
ورودی $\theta_o^1 x_o$ در تکنولوژی $\mathcal{T}_{1,\min}^{\text{CD}}$	۱	۲	۷	۱٫۳۴۷۹	–	۱٫۳۴۷۹
ورودی $\theta_o^2 x_o$ در تکنولوژی $\mathcal{T}_{2,\min}^{\text{CD}}$	۳	۴٫۰۹۵۲	۴٫۵۹۰۹	۳	۵	۳
ورودی $\theta_o^{\{1,2\}} x_o$ در متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\{1,2\}}^{\text{CD}}$	۱	۲	۴٫۵۹۰۹	۱٫۳۴۷۹	۵	۱٫۳۴۷۹

یک نکته مهم و قابل توجه در این ارزیابی این است که واحد تصمیم‌گیرنده E در تکنولوژی گروهی اول قرار ندارد. بنابراین، مدل (۴) در ارزیابی این واحد نسبت به تکنولوژی گروهی اول نشدنی است و لذا هیچ اندازه کارایی برای آن در جدول وارد نشده است. مقدار بهینه ورودی برای هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده در تکنولوژه‌های کاب-داگلاس گروهی $\mathcal{T}_{1,\min}^{\text{CD}}$ و $\mathcal{T}_{2,\min}^{\text{CD}}$ بترتیب در سطرهای سوم و چهارم جدول ۳ آمده است.

برای بدست آوردن اندازه متاکارایی ورودی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده، متاتکنولوژی حاصل از اجتماع دو تکنولوژی گروهی را به‌صورت $\mathcal{T}_{\{1,2\}}^{\text{CD}} = \mathcal{T}_{1,\min}^{\text{CD}} \cup \mathcal{T}_{2,\min}^{\text{CD}}$ در نظر می‌گیریم. بنا بر تساوی (۲۳)، مینیمم مقدار $\theta_o^{\{1,2\}} = \min\{\theta_o^1, \theta_o^2\}$ اندازه متاکارایی هر یک از واحدهای تحت ارزیابی را نسبت به این متاتکنولوژی نشان می‌دهد. مقادیر مینیمم را برای همه واحدها محاسبه و در سطر آخر جدول ۲ آورده‌ایم. مشاهده می‌کنیم واحد تصمیم‌گیرنده C نسبت به متاتکنولوژی $\mathcal{T}_{\{1,2\}}^{\text{CD}}$ ناکاراست، اگرچه نسبت به تکنولوژی گروهی $\mathcal{T}_{1,\min}^{\text{CD}}$ کاراست. مقدار بهینه ورودی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده در متاتکنولوژی کاب-داگلاس در سطر آخر جدول ۳ آمده است.

برای اجرای روش تک-مرحله‌ای دوم، هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده را با استفاده از مسئله بهینه‌سازی خطی تعریف شده در (۴۷) تا (۵۲) ارزیابی کردیم. نتایج ارزیابی همان نتایج گزارش شده در سطرهای آخر دو جدول ۲ و ۳ هستند.

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در کاربردهایی از تحلیل پوششی داده‌ها که فرض تجانس همه واحدهای تصمیم‌گیرنده در آنها برقرار نیست، واحدهای تصمیم‌گیرنده بر مبنای تجانس آنها گروه‌بندی می‌شوند و متاتکنولوژی حاصل از مشاهدات گروه‌بندی شده برای فرمول‌بندی مدل‌های ارزیابی کارایی بکار گرفته می‌شود. در متاتکنولوژی‌های موجود که مبتنی بر فرض تحدب معمولی درون‌گروهی هستند، مرز همه تکنولوژی‌های گروهی مقعر است و لذا بهره‌وری حاشیه‌ای در مرز هر یک از آنها غیرافزایشی است.

جایگزینی فرض تحدب معمولی با فرض تحدب لگاریتمی در چارچوب استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها برای اعمال افزایشی، ثابت و کاهشی بودن همزمان بهره‌وری حاشیه‌ای در مرز تولید تکنولوژی تولید پیشنهاد شده است. ولی تا کنون هیچ متاتکنولوژی با تکنولوژی‌های گروهی لگاریتمی محدب بسط نیافته است. بنابراین، مدل‌سازی اصل موضوعی چنین متاتکنولوژی‌ای برای اولین بار در این مقاله تحت عنوان متاتکنولوژی کاب-داگلاس انجام می‌شود.

بدون اعمال هیچ رابطه از پیش تعیین‌شده‌ای بین متاتکنولوژی و تکنولوژی‌های گروهی در تعبیر مفهومی متاتکنولوژی، ثابت می‌کنیم که متاتکنولوژی کاب-داگلاس برابر با اجتماع تکنولوژی‌های کاب-داگلاس گروهی آن است. بر مبنای این توصیف ساختاری، یک روش برای اندازه‌گیری متاکارایی در متاتکنولوژی کاب-داگلاس ارائه می‌شود. این روش متاکارایی واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی را با حل مسائل بهینه‌سازی خطی به تعداد زیرگروه‌های مجموعه مشاهدات محاسبه می‌کند.

نشان می‌دهیم که متاتکنولوژی کاب-داگلاس فقط یک زیرمجموعه از تکنولوژی کاب-داگلاس استاندارد تولید شده توسط واحدهای تصمیم‌گیرنده مشاهده شده است، ولی لزوماً با آن برابر نیست. بنابراین، متاتکنولوژی کاب-داگلاس برخلاف تکنولوژی‌های گروهی‌اش ممکن است لگاریتمی محدب نباشد. همچنین، استفاده از تکنولوژی کاب-داگلاس به جای متاتکنولوژی کاب-داگلاس برای اندازه‌گیری کارایی ممکن است منجر به بزرگتر شدن مدل تکنولوژی واقعی و لذا کوچکتر شدن اندازه‌های کارایی شود.

به منظور اندازه‌گیری تک‌مرحله‌ای متاکارایی واحد تحت ارزیابی در متاتکنولوژی کاب-داگلاس با حل تنها یک مسئله بهینه‌سازی خطی، یک نمایش جبری از متاتکنولوژی کاب داگلاس ارائه می‌کنیم. با استفاده از این نمایش جبری، یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مختلط با متغیرهای پیوسته و دودویی برای ارزیابی متاکارایی شعاعی ورودی فرمول‌بندی می‌کنیم. سپس، با استفاده از پیوسته‌سازی متغیرهای دودویی و تغییر متغیرهای مناسب، این مسئله را به یک مسئله بهینه‌سازی خطی معادل تبدیل می‌کنیم. نتایج ارائه شده با استفاده از مثال عددی تشریح می‌شوند. نتایج ارائه شده را می‌توان برای اندازه‌گیری متاکارایی شعاعی خروجی و کارایی غیرشعاعی مبتنی بر تابع فاصله جهتدار [19] تعمیم داد.

بر مبنای نتایج این مقاله، پیشنهادات زیر برای انجام پژوهش‌های آتی ارائه می‌شوند. با توجه به نتایج ارائه شده در [20]، ارزیابی بازده به مقیاس در متاتکنولوژی کاب-داگلاس اولین موضوع پیشنهادی است. با توجه به نتایج [9]، ارزیابی میزان تأثیر تجربی حذف تحدب لگاریتمی تکنولوژی‌های گروهی از یک طرف و محدب‌سازی لگاریتمی کل متاتکنولوژی از طرف دیگر در اندازه‌گیری متاکارایی می‌توانند به عنوان موضوعات دیگر مورد بررسی قرار گیرند. کاربردهای عملی و انجام آزمایش‌های عددی نتایج این مقاله نیز جزو موضوعات دیگر برای انجام پژوهش‌های آتی است. در نهایت، انجام تحلیل‌های حساسیت و ارزیابی تأثیر تغییرات داده‌ها بر عملکرد مدل پیشنهادی ما، یکی دیگر از مسیرهای پیش رو برای پژوهش‌های آتی است.

فهرست منابع

[1] A. Charnes, W. W. Cooper, E. R. (1984). Measuring the efficiency of decision making units: A comment. *European Journal of Operational Research*, *15*(3), 331–332. https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8.

[2] Mergoni, A., Emrouznejad, A., & De Witte, K. (2024). Fifty years of Data Envelopment Analysis. *European Journal of Operational Research*. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.12.049.

[3] Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Springer New York, NY.

[4] Dyson, R. G., Allen, R., Camanho, A. S., Podinovski, V. V, Sarrico, C. S., & Shale, E. A. (2001). Pitfalls and protocols in DEA. *European Journal of Operational research, 132*(2), 245–259. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00149-1.

[5] Afsharian, M., & Podinovski, V. V. (2018). A linear programming approach to efficiency evaluation in nonconvex metatechnologies. *European Journal of Operational Research, 268*(1), 268–280. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.013.

[6] O'Donnell, C., Rao, D., & Battese, G. (2008). Metafrontier frameworks for the study of firm-level efficiencies and technology ratios. *Empirical Economics, 34*(1), 231–255. https://doi.org/10.1007/s00181-007-0119-4.

[7] Mehdiloo, M., Sadeghi, J., & Kerstens, K. (2024). *Top down axiomatic modeling of metatechnologies and evaluating directional economic efficiency*. https://www.ieseg.fr/wp-content/uploads/2024/05/2024-EQM-03.pdf.

[8] Walheer, B. (2024). Meta-frontier: literature review and toolkit. *Operational Research*, *24*. https://doi.org/10.1007/s12351-024-00830-z.

[9] Kerstens, K., O'Donnell, C., & Van de Woestyne, I. (2019). Metatechnology frontier and convexity: A restatement. *European Journal of Operational Research, 275*(2), 780–792. https://doi.org/10.1016/J.EJOR.2018.11.064.

[10] Banker, R., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, *30*(9), 1078–1092. https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078.

[11] Afriat, S. N. (1972). Efficiency estimation of production functions. *International Economic Review, 13*(3), 568–598. https://doi.org/10.2307/2525845.

[12] Shephard, R. W. (1974). *Indirect production functions*. Mathematical Systems in Economics No. 10. Anton Hain, Meisenheim am Glan.

[13] Färe, R., Grosskopf, S., & Logan, J. (1983). The relative efficiency of Illinois electric utilities. *Resources and Energy, 5*(4), 349–367. https://doi.org/10.1016/0165-0572(83)90033-6.

[14] Banker, R. D., & Maindiratta, A. (1986). Piecewise loglinear estimation of efficient production surfaces. *Management Science, 32*, 126–135.

https://doi.org/10.1287/mnsc.32.1.126.

[15] Charnes, A., Cooper, W. W., Seiford, L., & Stutz, J. (1982). A multiplicative model for efficiency analysis. *Socio Economic Planning Sciences*, *16*, 213–224. https://doi.org/0038-0121(82)90029-5.

[16] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W., & Schinnar, A. (1981). A bi-extremal principle for frontier estimation and efficiency evaluation. *Management Science*, *27*, 1370–1382. https://doi.org/10.1287/mnsc.27.12.1370.

[17] Mehdiloozad, M., Sahoo, B. K., & Roshdi, I. (2014). A generalized multiplicative directional distance function for efficiency measurement in DEA. *European Journal of Operational Research*, *232*(3), 679–688. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.07.042

[18] Briec, W., Fukuyama, H., & Ravelojaona, P. (2021). Exponential distance function and duality theory. *European Journal of Operational Research*, *293*(3), 1002–1014. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.11.037.

[19] Chambers, R. G., Chung, Y., & Färe, R. (1998). Profit, directional distance functions, and Nerlovian efficiency. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *98*(2), 351–364. https://doi.org/10.1023/A:1022637501082.

[20] Zarepisheh, M., Khorram, E., & Jahanshahloo, G. R. (2010). Returns to scale in multiplicative models in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research*, *173*, 195–206. https://doi.org/10.1007/s10479-009-0537-0.